

Chapter 10

Géométrie de l'espace

Dans tout ce qui suit l'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Activité (1)

On considère dans l'espace les points $A(2; 1; 3)$, $B(1; 1; -2)$ et $C(2; -1; 0)$.

- 1
 - a Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
 - b Etudier l'alignement des points A, B et C .
- 2
 - a Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .
 - b Est-ce que le point $D(4, -3, 2)$ appartient à (AB) ?
 - c Donner deux équations cartésiennes de la droite (AB) .
- 3 Donner une équation cartésienne du plan (ABC) .

1 Produit scalaire dans l'espace et applications

1 Définition

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, A, B et C trois points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Il existe au moins un plan (P) contenant les points A, B et C .
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans le plan (P) .

Remarque

Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan s'étendent dans l'espace.

Conséquences

- 1 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et A, B et C trois points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) . On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.
- 2 Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.
- 3 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- 4 Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est un nombre positif, noté $\vec{u}^2$, et appelé le carré scalaire de $\vec{u}$.

Propriété

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ Trois vecteurs de l'espace et $k \in \mathbb{R}$.

- 1 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- 2 $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$;
- 3 $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;
- 4 $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$.

2 Expression analytique du produit scalaire dans l'espace

Propriété

Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ deux vecteurs de l'espace, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Conséquences

- 1 Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- 2 Si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace, alors

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

2

Applications du produit scalaire

1

Orthogonalité de deux droites dans l'espace

Application(1)

Soient $A(2, -1, 1)$, $B(5, 3, 1)$ et $C(6, -4, 1)$ trois points de l'espace.

Calculer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis en déduire la nature du triangle ABC .

Propriété

Soient (D_1) et (D_2) deux droites de l'espace dirigées respectivement par $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$.

Application(2)

Montrer que $(D_1) \perp (D_2)$ dans les cas suivants :

① (D_1) est dirigée par $\vec{u}(1, 2, 3)$ et $(D_2) : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 2t \\ z = 5 \end{cases} / t \in \mathbb{R}.$

② (D_1) est définie par les équations $x - 2 = \frac{y + 1}{2} = \frac{5 - z}{2}$ et $(D_2) : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - 3t \\ z = -2 - 2t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$

3

Équation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal

Propriété

Soient $\vec{u}(a, b, c)$ un vecteur non nul et A un point de l'espace et $k \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ est un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0 (d \in \mathbb{R})$.



Exemple

Soient $\vec{u}(2, 3, -5)$ un vecteur et $A(0, 2, -1)$ un point de l'espace.

Déterminons $(\mathcal{P})$ L'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = -2$.

On a $M(x, y, z) \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = -2$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y-2 \\ z+1 \end{pmatrix} = -2$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3(y-2) - 5(z-1) = -2$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3y - 5z + 1 = 0.$$

D'où $(\mathcal{P})$ est le plan d'équation $2x + 3y - 5z + 1 = 0$.

Propriété

Soit $\vec{n}(a, b, c)$ un vecteur non nul et $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace.

Il existe un unique plan $(\mathcal{P})$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ (C-à-d est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à $(\mathcal{P})$).

$$M(x, y, z) \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$



Exemple

Déterminons une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par $A(1, -2, 3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1, -3, -2)$.

Soit $M(x, y, z)$ un point de $(\mathcal{P})$. On a $\overrightarrow{AM}(x-1, y+2, z-3)$.

On a $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x-1) - 3(y+2) - 2(z-3) = 0$

$$\Leftrightarrow x - 3y - 2z - 1 = 0$$

Méthode II:

Puisque $(\mathcal{P})$ est de vecteur normal $\vec{n}(1, -3, -2)$, alors $(\mathcal{P}) : x - 3y - 2z + d = 0$.

Or $A \in (\mathcal{P})$, alors $1 - 3(-2) - 2(3) + d = 0$ et $d = -1$.

D'où $(\mathcal{P}) : x - 3y - 2z - 1 = 0$.

Application(3)

- Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ dans les cas suivants :

a $A(1, 0, 5)$ et $\vec{n}(-1, 1, 0)$.

b $A(\sqrt{2}, -2, 5)$ et $\vec{n}(-1, 1, 0)$.

- Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par A et orthogonal à la droite

$$(D): \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases} \quad / t \in \mathbb{R}.$$

- Donner une équation cartésienne du plan médiateur $(\mathcal{P})$ du segment $[MN]$ tel que $M(0, 5, -1)$ et $N(2, 1, 1)$.

Exercice 47

On considère dans l'espace les points $A(1; 1; 2)$, $B(0; 1; 1)$ et le vecteur $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

- 1 Vérifier que les points O , A et B ne sont pas alignés.
- 2 Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$.
- 3 En déduire une équation cartésienne du plan (OAB) .
- 4 Donner une représentation paramétrique de la droite passant par le point A est orthogonale au plan (OAB) .

1 Orthogonalité de deux plans dans l'espace

Propriété

Soient (P) et (Q) deux plans de l'espace et $\vec{n}_{(P)}$ et $\vec{n}_{(Q)}$ sont respectivement deux vecteurs normaux de (P) et (Q) .

- 1 (P) et (Q) sont orthogonales si et seulement si $\vec{n}_{(Q)} \cdot \vec{n}_{(P)} = 0$.
- 2 (P) et (Q) sont parallèles si et seulement si $\vec{n}_{(Q)}$ et $\vec{n}_{(P)}$ sont parallèles.

Application(4)

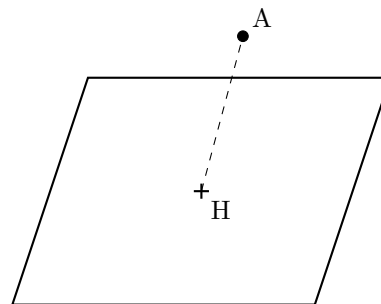
Etudier l'orthogonalité des plans (P) et (Q) .

- 1 $(P): 2x + z - 1 = 0$ et $(Q): x - 2y - 2z + 1 = 0$.
- 2 $(P): x - y - 4z + 1 = 0$ et $(Q): 4x - y - 2z - 3 = 0$.

4 Distance d'un point de l'espace à un plan

Soient (P) un plan et A un point de l'espace et H la projection orthogonale de A sur le plan (P) .

La distance du point A au plan (P) est la distance AH et on la note $d(A, (P))$.



Propriété

Soient (P) un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace. La distance du point A au plan (P) est: $d(A, (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.



Exemple

Calculons la distance du point $A(1, -1, 2)$ du plan (P) d'équation $(P) : 2x + y - z + 1 = 0$. On a $\vec{n}(2, 1, -1)$ est un vecteur normal de (P) .

Donc $d(A, (P)) = \frac{|2 \times 1 - 1 - 2 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 0$, en déduit que $A \in (P)$.

Application(5)

On considère (P) le plan d'équation $x + y + z + 1 = 0$ et $A(1, 2, 0)$ est point de l'espace.

- 1 Calculer $d(A, (P))$.
- 2 Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A est orthogonal à (P) .
- 3 Déterminer les coordonnées du point H le projeté orthogonal de A sur (P) .

Exercice 48

On considère les points $A(-1, 0, 1)$, $B(1, 2, -1)$ et $C(1, -1, 2)$ et soit (P) le plan d'équation $x + y - z = 0$.

- 1
 - a Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .
 - b Vérifier que la droite (AB) est orthogonale à (P) .
 - c Déterminer les coordonnées du point d'intersection de (AB) et (P) .
- 2 Montrer que la droite (AC) est parallèle à (P) .
- 3 Donner une équation cartésienne du plan (Q) passant par B et parallèle à (P) .

5

Etude analytique d'une sphère

1

Equation cartésienne d'une sphère

La sphère (S) de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\Omega M = R$ et on la note par $S(\Omega, R)$.

On a $M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow \Omega M = R$

$$\Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 = R^2.$$

Cette équation est appelée équation cartésienne de la sphère (S) .

Application(6)

- 1 Donner une équation cartésienne du sphère (S_1) de centre $\Omega(2, 0, 1)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$.
- 2
 - a Donner une équation cartésienne du sphère (S_2) de centre $\Omega(1, -1, 2)$ et passant par le point $A(-1, 4, 5)$.
 - b Est-ce que le point $B(1, 2, -2)$ appartient à (S_2) ?

Propriété

Soient A et B deux points de l'espace.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ est la sphère de diamètre $[AB]$

Application(6)

Donner, par deux méthodes, une équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$ telle que $A(-1, 3, 2)$ et $B(-3, 1; 0)$.

2. Etude de l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + a^2 + b^2 + c^2 + d = 0$$

Propriété

Soient a, b et c et d des réels tels que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + a^2 + b^2 + c^2 + d = 0$.

- 1 Si $a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$, (S) est une sphère de centre $\Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2}$.
- 2 Si $a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 0$, (S) est le point $\Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$.
- 3 Si $a^2 + b^2 + c^2 - 4d < 0$, (S) est l'ensemble vide.



Exemple

Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 3z + 2 = 0$. On a $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 3z + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + z^2 + 3z + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y - 1)^2 - 1 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y - 1)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

D'où (S) est une sphère de centre $\Omega\left(0, 1, -\frac{3}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Application(8)

Déterminer (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ dans les cas suivants :

- 1 $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y = 0.$
- 2 $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 19 = 0.$
- 3 $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 2z + 5 = 0.$

6 Représentation paramétrique d'une sphère

Soit (S) une sphère de centre $\Omega(a, b, c)$ et de rayon R .

$$M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + R \sin \varphi \cos \theta \\ y = b + R \sin \varphi \sin \theta / (\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2 \\ z = c + R \cos \varphi \end{cases}$$

Ce système est appelé représentation paramétrique de (S) .

Application(9)

Déterminer une représentation paramétrique la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

7 Position relative et d'une sphère et un plan et d'une sphère et une droite

1 Position relative et d'une sphère et un plan

Propriété

Soient (S) la sphère de centre Ω et de rayon R et (P) un plan dans l'espace et $d = d(\Omega; (P))$.

- 1 Si $d > R$, alors (P) ne coupe pas (S) .
- 2 Si $d = R$, alors (P) est tangent à (S) en un point H le projeté orthogonale de Ω sur (P) .
- 3 Si $d < R$, alors (P) coupe (S) suivant un cercle de centre H le projeté orthogonale de Ω sur (P) et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Application(10)

On considère l'ensemble (S) des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z - 1 = 0$.

1 Montrer que (S) est une sphère en déterminant son centre et son rayon R .

2 Etudier la position relative de (S) et les plans suivants :

a $(P_1) : 2x + y + 2z - 3 = 0$.

b $(P_2) : x - 2y + 2z + 3 = 0$.

c $(P_3) : x + 2y - z + 9 = 0$.

8

Position relative et d'une sphère et une droite

L'intersection d'une sphère et d'une droite est soit un deux-points, un point ou l'ensemble vide.

Application(11)

Déterminer la position relative de la droite (D) de représentative paramétrique

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t/t \in \mathbb{R} \text{ avec les sphères } (S_1) : x^2 + y^2 + z^2 + 2x = 0 \text{ et} \\ z = 2 + t \end{cases}$$

$$(S_2) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + \frac{31}{3} = 0.$$

Exercice 49

Soit (P) le plan d'équation $2x - 2y - 5 = 0$ et soit (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z + 11 = 0$.

1 Montrer que (S) est une sphère dont on déterminera le centre Ω et le rayon R .

2 Montrer que le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C) dont on déterminera le centre H et le rayon r .

3 Déterminer une équation cartésienne de chacun des deux plans tangents à (S) et parallèle à (P) .

4 a Soit (Q) le plan d'équation $x + y + z + 1 = 0$.

b Vérifier que le plan (P) est tangent à la sphère (S) puis déterminer leur point de contact.

5 a Vérifier que $(P) \perp (Q)$.

b Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) intersection de (P) et (Q) .

6 a vérifier que le point $A(2; -1; -2)$ est un point de la sphère (S) .

b Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) tangente à la sphère (S) au point A .

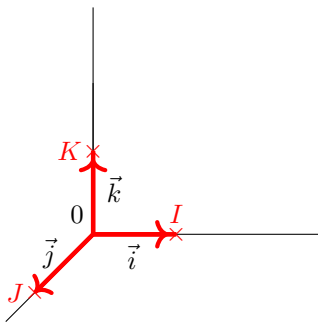
1 Définition

Trois demi-droites non coplanaires de l'espace $[OI]$, $[OJ]$ et $[OK]$ constituent dans cet ordre un trièdre noté $([OI], [OJ], [OK])$.

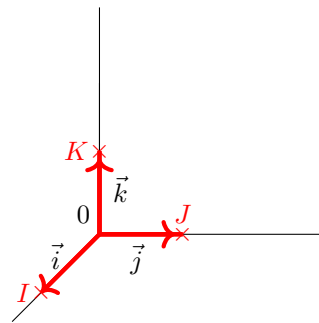
Le bonhomme d'ampère est une personne virtuelle placée le long de $[OK]$, les pieds en O et qui regarde dans la direction de $[OI]$. Si la cote $[OJ]$ est à sa gauche, on dit que le trièdre $([OI], [OJ], [OK])$ est direct.

Soient $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ des vecteurs définis par : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$. Si que le trièdre $([OI], [OJ], [OK])$ est direct on dit que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct.

La base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit directe si le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct.



$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est indirect

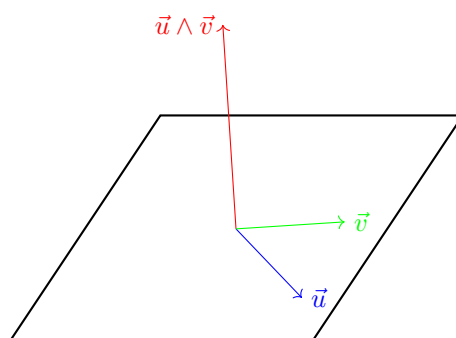


$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct

Définition

Le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :

- 1 Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- 2 Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, tel que :
- 3 $\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$.
- 4 La base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est de sens direct.
- 5 $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\overrightarrow{(\vec{u}, \vec{v})})|$.



Propriété

- 1 $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}.$
- 2 $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{0}.$
- 3 $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}.$
- 4 $(\alpha \in \mathbb{R})(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v}).$

2 Forme analytique du produit vectoriel

Propriété

Soient $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b', c')$ deux vecteurs de l'espace.

$$\text{On a : } \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Exemple

Calculons le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}(0, 1, -2)$ et $\vec{v}(-3, 1, 2)$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k} \end{aligned}$$

Application(12)

Calculer le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}(-1, 3, 0)$ et $\vec{v}(2, -6, 1)$.

3 Applications du produit vectoriel

10.9.3.1 Equation d'un plan défini par trois points non alignés

Si $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$, alors les points A, B et C ne sont pas alignés, par suite le vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est normal au plan (ABC) .

Application (13)

On considère les points $A(2, 4, -5)$, $B(1, 0, 4)$ et $C(0, 3, 1)$.

- 1 Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
- 2 Donner une équation du plan (ABC) .

4 L'aire d'un triangle

Propriété

- 1 Soit ABC est un triangle. L'aire de ABC est $S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$.
- 2 Soit $ABCD$ est un parallélogramme. L'aire de $ABCD$ est $S_{ABCD} = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$.

Application(7)

On considère les points $A(-1, 2, 0)$, $B(3, 0, 4)$ et $C(-2, 1, 2)$.

- 1 Vérifier que les point A, B et C ne sont pas alignés.
- 2 Déterminer l'aire du triangle ABC .

5 Distance d'un point à une droite

Soit (D) une droite passant par A et dirigée par un vecteur $\vec{u}$.

La distance d'un point M de la droite (D) est la distance MH tel que H le projeté orthogonal de M sur (D) . On note cette distance par $d(M, D(A, \vec{u}))$.

Pour déterminer les coordonnées du points H on utilise : $H \in (D)$ et $\vec{MH} \cdot \vec{u} = 0$.

Propriété

$$d(M, D(A, \vec{u})) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Application(15)

- 1 Calculer la distance du point $M(3, 2, 1)$ à la droite $(D) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1/t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$
- 2 **a** Calculer la distance du point $N(-1, 2, 0)$ à la droite $(\Delta) : \begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$.
- b** Déterminer les coordonnées de H projeté orthogonal de N sur (Δ) .

Exercice 50

Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1; -1; 0)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$.

- 1 Donner l'équation cartésienne de (S) .
- 2 On considère les droites $(D_1) : \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + 4t \\ z = 5 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), (D_2) : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -2 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $(D_3) :$

$$\begin{cases} x = -2 + 6t \\ y = 4t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Calculer les distances $d(\Omega, (D_1))$, $d(\Omega, (D_2))$ et $d(\Omega, (D_3))$ puis étudier les positions relatives de (S) et les droites (D_1) , (D_2) et (D_3) .

6 Intersection de deux plans

Propriété

Soient (P) et (Q) deux plans de l'espace et $\vec{n}_{(P)}$ et $\vec{n}_{(Q)}$ sont respectivement deux vecteurs normaux de (P) et (Q) .

Si $\vec{n}_{(P)} \wedge \vec{n}_{(Q)} \neq \vec{0}$, alors (P) et (Q) sont sécantes suivant une droite (D) dirigée par le vecteur $\vec{n}_{(P)} \wedge \vec{n}_{(Q)}$

Application(16)

On considère les plans $(P) : 2x + z - 1 = 0$ et $(Q) : x - 2y - 2z + 1 = 0$.

- 1 Vérifier que (P) et (Q) sont sécantes suivant une droite (D) en déterminant un vecteur directeur.
- 2 Donner une représentation paramétrique de (D) .

Exercice 51

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points :

$A(0; -2; -2); B(1; -2; -4); C(-3; -1; 2)$

- 1
 - a Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.
 - b En déduire $2x + 2y + z + 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .
- 2 Soit (S) la sphère d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 23 = 0$.
Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1; 0; 1)$ et que son rayon est $R = 5$.
- 3
 - a Vérifier que : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan (ABC) .
 - b -Déterminer les coordonnées du point H intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC) .
- 4 Vérifier que $d(\Omega; (ABC)) = 3$ puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle de rayon 4 et on déterminera le centre.

Exercice 52

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère la sphère (S) dont une équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$.

Et le plan (P) d'équation $y - z = 0$.

- 1
 - a Montrer que le centre de (S) est $\Omega(1; 1; 1)$ et que son rayon $R = 2$.
 - b Calculer $d(\Omega; (P))$ et en déduire le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C) . c-Déterminer le centre et le rayon du cercle (C) .
- 2 Soit (Δ) la droite passant par le point $A(1; -2; 2)$ et orthogonal au plan (P) .
 - a Montrer que $\vec{u}(0; 1; -1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) .
 - b Montrer que: $\|\vec{\Omega A} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{2}\|\vec{u}\|$ et en déduire que la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points.
 - c Déterminer le triple des coordonnées de chacun des points d'intersection de la droite (Δ) et la sphère (S) .