

Chapter 9

Fonctions exponentielle

1 Fonction exponentielle népérienne

1 Activité (1):

Activité (1)

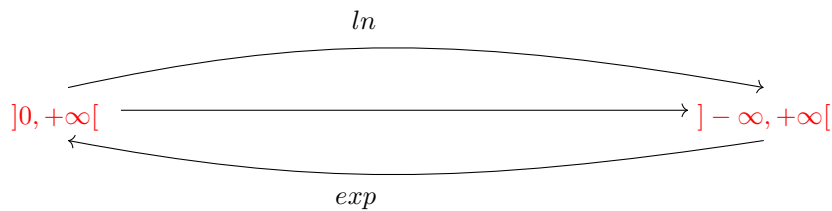
- 1 Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \ln x$ admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle J à déterminer.
La fonction réciproque de $x \mapsto \ln x$ est appelée fonction exponentielle népérienne et se note par $\exp$.
- 2 Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}), \exp(x) > 0$.
- 3
 - a Calculer $\ln(e^2) \cdot \ln(e) \cdot \ln(1)$ et $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$.
 - b En déduire $\exp(2)$, $\exp(1)$, $\exp(0)$ et $\exp(-2)$.
- 4
 - a Tracer $(\mathcal{C}_{\ln})$ et $(\mathcal{C}_{\exp})$ sur le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
 - b En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x)$.

1 Définition et propriétés

Définition

On appelle fonction exponentielle népérienne, notée $\exp$, la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien $\ln$ et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in]0; +\infty[); \exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln(y).$$



Notation e^x

Soit r un rationnel. On a : $\ln(\exp(r)) = r$ et on sait que $\ln(e^r) = r \ln(e) = r$.

Donc $(\forall r \in \mathbb{Q}) : \ln(\exp(r)) = \ln(e^r)$.

On prolonge cette relation de l'ensemble $\mathbb{Q}$ sur l'ensemble $\mathbb{R}$, on aura :

$(\forall x \in \mathbb{R}) : \exp(x) = e^x$

Propriété

- 1 la fonction $\exp$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- 2 $(\forall x \in \mathbb{R}) : e^x > 0$.
- 3 $(\forall x \in]0; +\infty[(\forall y \in \mathbb{R}) : e^y = x \Leftrightarrow \ln(x) = y$.
- 4 $(\forall x \in \mathbb{R}) : \ln(e^x) = x$ et $(\forall x \in]0; +\infty[) : e^{\ln(x)} = x$.
- 5 $(\forall a \in \mathbb{R}) (\forall b \in \mathbb{R}) : e^a > e^b \Rightarrow a > b$.
- 6 $(\forall a \in \mathbb{R}) (\forall b \in \mathbb{R}) : e^a = e^b \Rightarrow a = b$.

Application(1)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3e^x}{2e^x + 4}$.

- 1 Déterminer D_f puis montrer que f est continue sur D_f .
- 2 Calculer $f(0)$ et $f(\ln(2))$.

Application(2)

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1 $e^{1-x} = e^{x-x^2}$

2 $e^{x^2-x} = 1$

3 $(e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$

4 $(e^x)^2 - 3e^x + 2 < 0$

5 $(e^x + 2)(e^{-x+1} - 4) \geq 0$

6 $\frac{e^x + 1}{e^{-x} - e} \leq 0$

Propriété

Soient a et b deux réels et $r \in \mathbb{Q}$, on a :

1 $e^{x+y} = e^x e^y$

2 $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

3 $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

4 $(e^x)^r = e^{rx}$

Application(3)

1 Simplifier les expressions suivantes:

a $A = \frac{e^{2x} \times e^{3x}}{(e^x)^4}$

b $B = (e^{2-x})^2 \times e^{3x-4}$

c $C = e^{2x} \left((e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2 \right)$

2 Montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}) : \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

Exercice 44

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a $e^x + 6e^{-x} - 5 = 0$

b $(e^x)^{15} \times e^{x^2+5} = \frac{e^{5x}}{e^4}$

$$\boxed{c} \quad \frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} > e^{-x+2}$$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} 5e^{2x+1} + 3e^{-y} = 3 \\ 7e^{2x+1} - 4e^{-y} = 2 \end{cases}$

2 Limites usuelles

Propriété

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ - $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$

5 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

1 0 Exemple:



Exemple

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x = +\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Application(4)

Calculer les limites suivantes:

1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \sqrt{x}$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1)e^{-x}$

3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}e^{-x}$

4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x+4}{x}}$

5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^3 + x + 1}$

6 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^{3x} - 1}$

8 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

9 $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{3x}$

10 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{x^3+3x}}{x^3 - 1}$

3 Dérivée de la fonction exponentielle népérienne

On pose $(\forall x \in]0, +\infty[) f(x) = \ln(x)$, donc $(\forall x \in \mathbb{R}) f^{-1}(x) = e^x$.

Et on sait que $(\forall x \in \mathbb{R}) : (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ d'où $(\forall x \in \mathbb{R}) : (e^x)' = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$.

Propriété

La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) : (e^x)' = e^x$.

Application(5)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, et soit (C_f) sa représentation graphique sur le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$ et déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 2 Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = x - 1 - \frac{2}{e^x + 1}$ et déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 3 Étudier les branches infinies de (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
- 4 Montrer que f est impaire.
- 5 Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
- 6 Donner le tableau des variations de f .
- 7 Tracer (C_f) .

Propriété

Si u est une fonction dérivable sur I , alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a : $(\forall x \in I) : (e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$.

Application(6)

Déterminer f' dans les cas suivants:

- 1 $f(x) = e^{x^2+3x}$
- 2 $f(x) = e^{x-2\ln(x+1)}$
- 3 $f(x) = (e^{2x} - e^{-x})^2$
- 4 $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$

Corollaire

Soit u une fonction dérivable sur I .

Les primitives de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + c$ tel que $c \in \mathbb{R}$.

Application(7)

Déterminer l'ensemble des primitives de f dans les cas suivants:

1 $f(x) = 2e^{2x} - e^{-x}$

2 $f(x) = e^{5x+4}$

3 $(x^2 + 1)e^{x^3+3x}$

4 $f(x) = \frac{2x+1}{e^{x^2+x+1}}$

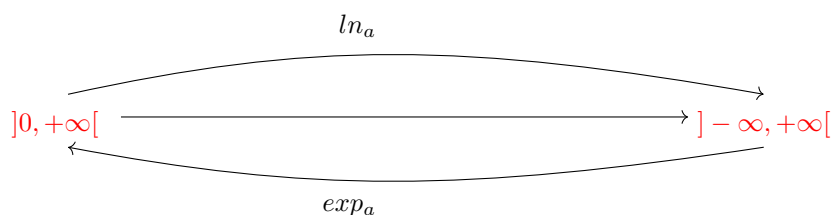
2

Fonction exponentielle de base $a(a \neq 1; a > 0)$

Définition

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

La fonction réciproque de $x \mapsto \log_a(x)$ est appelée fonction exponentielle de base a qui est définie sur $\mathbb{R}$ et notée par $\exp_a(x)$ ou a^x .



Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a(y)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$$

$$\Leftrightarrow x \ln(a) = \ln(y)$$

$$\Leftrightarrow e^{x \ln(a)} = y.$$

D'où : $a^x = e^{x \ln(a)}$.



Exemple

1 $2^x = e^{x \ln(2)}$

2 $4^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln(4)} = e^{2\sqrt{2} \ln(2)}$

3 $\sqrt{3}^x = e^{x \ln(\sqrt{3})} = e^{\frac{x}{2} \ln(3)}$



Exemple

$\curvearrowright (\forall x \in \mathbb{R}) : 1^x = 1.$

Propriété

Soient x et y deux réels et $r \in \mathbb{Q}$, on a :

1 $a^{x+y} = a^x a^y$

2 $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

3 $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$

4 $a^{rx} = (a^x)^r$

Application(8)

Montrer que : $\frac{9^{\frac{2}{\ln(3)}} \times 8^{\frac{3}{\ln(4)}}}{25^{\frac{4}{\ln(5)}}} = \sqrt{e}$.

Exercice 45

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \frac{1}{4}$

b $3^x > 9^x$

c $10^{2x} + 2 \times 10^x - 3 > 0$

2 Calculer la dérivée des fonctions f et g telles que $f(x) = 2^{x^2+2x+2}$ et $g(x) = x^x$.

3 Calculer les limites suivantes :

a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$

b $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x - 2^x}{3^x}$

c $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 2^x}{x}$

d $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Exercice 46

1 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = e^{2x} - 2x$.

a Déterminer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis donner le tableau des variations de g .

b En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

2 Soit la fonction f qui définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \ln(e^{2x} - 2x)$ et soit (C_f) sa représentation graphique sur le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a i. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

ii. Vérifier que : $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{e^{2x}}{x} - 2\right) \frac{\ln(e^{2x} - 2x)}{e^{2x} - 2x}$.

iii. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

b i. Vérifier que $(\forall x \geq 0) : 1 - \frac{2x}{e^{2x}} > 0$ et que $2x + \ln \left(1 - \frac{2x}{e^{2x}} \right) = f(x)$.

ii. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

iii. Montrer que la droite d'équation $(D) : y = 2x$ est une asymptote

iv. oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

v. Montrer que $(\forall x \geq 0) : f(x) - 2x \leq 0$ puis déduire la position relative de (C_f) et (D) sur $[0, +\infty[$.

c i. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = \frac{2(e^{2x} - 1)}{g(x)}$.

ii. Donner le tableau des variations de f .

iii. Tracer (C_f) et (D) sur le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.