

Chapter 8

Equations différentielles

1

Equations différentielles du premier ordre

1

L'équation différentielle $y' = ay$ ($a \in \mathbb{R}^*$)

Activité (1)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = 2e^{-4x}$.

On pose $y = f(x)$ et $y' = f'(x)$ et $y'' = f''(x)$. Montrer que : $y'' + 3y' - 4y = 0$.

Toutes les équations où l'inconnue est une fonction, et qui se présente sous la forme d'une relation entre cette fonction et ses dérivées est appelée équation différentielle.

Propriété

Soit a un nombre réel non nul.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = ke^{ax}$ où k est un nombre réel quelconque.



Exemple

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 0$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = ke^{-2x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Application(1)

- 1 Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(1) y' = 3y \quad (2) y' + 5y = 0$$

- 2 a. Résoudre l'équation différentielle: $(E) 3y' - 2y = 0$.
b. Déterminer la solution de (E) qui vérifie : $y(3) = -1$.

2 L'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$)

Propriété

Soient a et b deux nombres réels tels que $a \neq 0$.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$.



Exemple

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E) : y' = 3y + 2$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ke^{3x} - \frac{2}{3}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Déterminons la solution g de l'équation (E) qui vérifie la condition $g(-1) = \frac{1}{3}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = ke^{3x} - \frac{2}{3}$.

La condition $g(-1) = \frac{1}{3}$ donne $ke^{-3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Donc $k = e^3$ il s'ensuit donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) = e^{3x+3} - \frac{2}{3}$.

Application(2)

- 1 Résoudre l'équation différentielle: $(E) : y' + 2y - 4 = 0$
- 2 Déterminer la solution de (E) dont la courbe passe par le point $A(-\ln(2), 6)$

2

Equation différentielles du second ordre : $y'' + ay' + by = 0$

Définition

Soient a et b deux nombres réels.

L'équation $r^2 + ar + b = 0$, où r est l'inconnue, s'appelle l'équation caractéristique de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$.

Propriété

On considère (E) l'équation différentielle $(E) : y'' + ay' + by = 0$ et soit Δ le discriminant de son équation caractéristique $(E') : r^2 + ar + b = 0$.

- 1 Si $\Delta > 0$, alors les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ tel que $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ où r_1 et r_2 sont les solutions de (E') .
- 2 Si $\Delta = 0$, alors les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto (\alpha + \beta x)e^{r_0 x}$ tel que $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ où r_0 est la solution de (E') .
- 3 Si $\Delta < 0$, alors les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx))e^{px}$ tel que $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ où $r_1 = p + iq$ et $r_2 = \bar{r}_1$ sont les solutions de (E') .

Application(3)

- 1 Résoudre les équations différentielles suivantes:
 $(E_1) : y'' - 3y' + 2y = 0.$
 $(E_2) : y'' + 4y' + 4y = 0.$
 $(E_3) : y'' - 4y' + 13y = 0.$
- 2
 - a Résoudre l'équation différentielle: $(E') : y'' - 5y' + 6y = 0$
 - b Déterminer la solution g de l'équation (E') vérifiant les conditions initiales : $g(0) = 1$ et $g'(0) = 2$
- 3
 - a Résoudre l'équation différentielle : $(E'') : y'' + 4y = 0$
 - b Déterminer la solution g de l'équation (E'') vérifiant les conditions initiales : $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$

Equations différentielles

Activité (1)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{-4x}$.

On pose $y = f(x)$ et $y' = f'(x)$ et $y'' = f''(x)$.

Montrer que : $y'' + 3y' - 4y = 0$.

Application(1)

- 1 Résoudre les équations différentielles suivantes:

$$(1) y' = 3y \quad (2) y' + 5y = 0$$

- 2 a. Résoudre l'équation $(E) : 3y' - 2y = 0$.
b. Déterminer la solution de (E) qui vérifie $y(3) = -1$.

Application(2)

- 1 Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 2y - 4 = 0$$

- 2 Déterminer la solution de (E) dont la courbe passe par le point $A(-\ln(2), 6)$

Application(3)

- 1 Résoudre les équations différentielles suivantes:

$$(E_1) : y'' - 3y' + 2y = 0.$$

$$(E_2) : y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$(E_3) : y'' - 4y' + 13y = 0.$$

- 2 a Résoudre l'équation différentielle :

$$(E') : y'' - 5y' + 6y = 0$$

- b Déterminer la solution g de l'équation (E') vérifiant les conditions initiales : $g(0) = 1$ et $g'(0) = 2$.

2 Daroir maison 4

Exercice 41

- 1 Résoudre l'équation différentielle: $(E'') : y'' + 4y = 0$

- 2 Déterminer la solution g de l'équation (E'') vérifiant les conditions initiales: $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Exercice 42

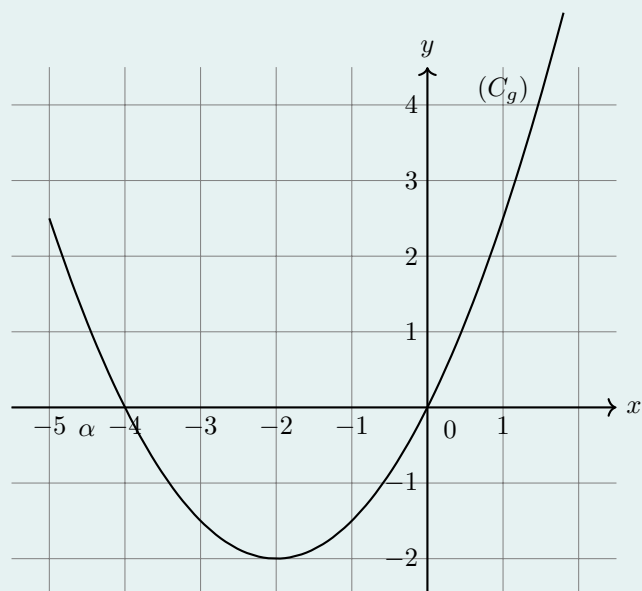
- 1 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation: $z^2 - 2z + 2 = 0$
- 2 On pose $a = 1 - i$ et $b = 2 + \sqrt{3} + i$
 - a Écrire a sous forme trigonométrique
 - b Vérifier que $\frac{b}{a} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ puis écrire b sous forme trigonométrique
 - c Dédire que b^6 est un nombre imaginaire pur
- 3 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et $c = -1 + i\sqrt{3}$. Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' , image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$
 - a Exprimer z' en fonction de z
 - b Vérifier que le point C est l'image du point B par la rotation R et en déduire la nature du triangle ABC
- 4 Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 2 - \sqrt{3} - i| = |z + 1 - i\sqrt{3}|$
 - a Déterminer l'ensemble (E)
 - b En déduire que le milieu du segment $[BC]$ appartient à l'ensemble (E)

Exercice 43

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 1 cm).

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- 2 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.
- 3
 - a Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$.
 - b Étudier le signe $(f(x) - x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ) .
- 4
 - a Montrer que $f'(x) = (e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 + xe^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - 1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
 - b Vérifier que $x(e^{\frac{x}{2}} - 1) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$.
 - c Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 5
 - a Montrer que $f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$; où

$$g(x) = (2x + 4)e^{\frac{x}{2}} - x - 4 \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}$$
 - b A partir de la courbe ci-contre de la fonction g , déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ (Remarque : $g(\alpha) = 0$)



c Etudier la concavité de la courbe (C) et déterminer les abscisses des deux points d'inflexions.

6 Construire la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}; \vec{j})$. (On prend: $\ln(4) \approx 1.4$, $\alpha \approx -4.5$ et $f(\alpha) = -3.5$)

a Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b Calculer $(f^{-1})'(\ln 4)$.

7 Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a Montrer par récurrence que $0 < u_n < \ln 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d Calculer la limite de la suite (u_n) .