

Chapter 7

Calcul intégral

1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Activité (1)

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle définie par $f(x) = 3x^2 - 1$.

- 1 Déterminer deux primitives F et G de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- 2 Calculer $F(2) - F(0)$, $G(2) - G(0)$. Que remarquez-vous?

Le nombre $F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix d'une primitive de la fonction f .

Le nombre $F(b) - F(a)$ s'appelle intégrale de la fonction f de a à b elle est notée $\int_a^b f(x)dx$

Définition

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et F une primitive de f sur $[a, b]$. Le nombre $F(b) - F(a)$ est appelé intégrale de f de a à b et on écrit : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.



Exemple

Calculons l'intégrale suivante $\int_0^1 \sqrt{x+1}dx$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue sur $[0; 1]$.

Donc : $\int_0^1 \sqrt{x+1}dx = \int_0^1 (x+1)' \sqrt{x+1}dx$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 (x+1)'(x+1)^{\frac{1}{2}}dx \\ &= \left[\frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1) \end{aligned}$$

Application(1)

Calculer les intégrales suivantes:

① $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

② $\int_0^2 (x+4) dx$

③ $\int_{e^2}^{e^4} \frac{\ln(x)}{x} dx;$

④ $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

⑤ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) dx$

⑥ $\int_{-2}^{-1} x 2^{-x^2} dx$



Remarque

Dans l'écriture $\int_a^b f(x) dx$, on peut remplacer la variable x par n'importe quelle autre lettre. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy = \int_a^b f(t) dt = \dots$

Exercice 33

Calculer les intégrales suivantes:

① $I_1 = \int_{-1}^1 (2x^3 - 5x^2 + 2) dx$

② $I_2 = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) dx$

③ $I_3 = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx$

④ $I_4 = \int_0^4 x \sqrt{1+x^2} dx$

⑤ $I_5 = \int_0^{\ln 3} e^x \sqrt{e^x + 1} dx$

⑥ $I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x \cdot \sin^5 x dx$

⑦ $I_7 = \int_1^2 \frac{x-1}{x^2-2x+2} dx$

⑧ $I_8 = \int_0^1 (1-x) e^{x^2-2x+3} dx$

⑨ $I_9 = \int_1^{e^2} \frac{1}{x \sqrt{1+\ln x}} dx$

Conséquences

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Pour tous a, b et c de I on a :

- 1 $\int_a^a f(x)dx = 0$
- 2 $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$
- 3 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (Relation de Chasles).



Exemple

$$\int_{-3}^2 |x|dx = \int_{-3}^0 |x|dx + \int_0^2 |x|dx = \int_{-3}^0 -x dx + \int_0^2 x dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{13}{2}$$

Application(2)

Calculer les intégrales suivantes:

- 1 $\int_{-1}^1 \frac{2|x|}{x^2+1} dx$
- 2 $\int_{-1}^5 |x^2 - 4x| dx$
- 3 $\int_0^2 |e^{-x+1} - 1| dx$

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ et $k \in \mathbb{R}$.

- 1 $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
- 2 $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$

Application(3)

On considère les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(3x) \cos(x)dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(3x) \sin(x)dx.$

- 1 Vérifier que $\cos(3x) \cos(x) + \sin(3x) \sin(x) = \cos(2x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 2 Vérifier que $\cos(3x) \cos(x) - \sin(3x) \sin(x) = \cos(4x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 3 Calculer $I + J$ et $I - J$ puis en déduire I et J .

Exercice 34

On pose : $K = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^t - 1}{e^t + 1} dt$ et $L = \int_0^{\ln(2)} \frac{1}{e^t + 1} dt$
Calculer $K + L$ et $K + 2L$ puis en déduire les valeurs de K et L .

2

Intégrale et ordre - la valeur moyenne

1

Intégrale et ordre

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ ($a \leq b$).

- 1 Si $(\forall x \in [a, b]); f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
- 2 Si $(\forall x \in [a, b]); f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Application(4)

- 1 Montrer que : $\int_1^2 \ln(x^2 + 1) dx \geq 0$.
- 2 Montrer que : $-\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{\sin(x)}{x^2} dx \leq \frac{1}{2}$.

2

Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment

Définition

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ ($a \leq b$).

Il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Le nombre $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ est appelé valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$



Exemple

La valeur moyenne de la fonction $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[1, 3]$ est $\frac{1}{2} \int_1^3 \frac{2x}{1+x^2} dx$ C'est-à-dire : $\frac{1}{2} [\ln(x^2 + 1)]_1^3 = \frac{\ln(5)}{2}$.

Application(5)

Calculer la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto \frac{\ln^2(x) + x}{x}$ sur l'intervalle $[1, e]$.

3 Techniques de calcul d'intégrales

1 Utilisation des primitives

Application(6)

1 Calculer les intégrales suivantes:

$$I = \int_2^e \frac{1}{x(\ln(x) + 1)} dx; J = \int_0^1 te^{t^2} dt; K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(x) dx \text{ et } L = \int_0^1 \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 1)^2} dx.$$

2 a Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

b En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} dx$.

Exercice 35

1 Calculer l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2(x)} - 4 \cos(2x) \right) dx$.

2 Montrer que $\left(\frac{x}{x^2 + 1} \right)^{\frac{4}{3}} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$ pour tout réel x puis calculer $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} dx$.

2 Décomposition des fractions rationnelles en une somme de fractions rationnelles

Application(7)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par: $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 4}{x - 1}$.

1 Déterminer les nombres réels a, b , et c pour que l'on ait pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$$

2 En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_2^3 f(x) dx$.

3 Linéarisation des fonctions trigonométriques

Application(8)

Linéariser le polynôme trigonométrique $\cos^3 x$ puis calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x dx$.

Exercice 36

Vérifier, pour tout réel x , que : $\sin^2 x \cdot \cos^3 x = \cos x \cdot \sin^2 x - \cos x \cdot \sin^4 x$.

Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$.

4 Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b]$ telles que u' et v' continues sur $[a, b]$.

On a : $(\forall x \in [a, b]); (u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Alors : $\int_a^b (u(x)v(x))' dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x)v'(x) dx$

D'où $\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$.

Propriété

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que ses dérivées u' et v' sont continues sur I .

Pour tout $(a, b) \in I^2$ on a : $\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$.



Exemple

Calculons l'intégrale $I = \int_0^1 x e^x dx$.

Posons $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = x \end{cases}$, alors $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$.

Il s'ensuit $I = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [x e^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = e - e + 1 = 1$.



Remarque

Le choix des fonctions u' et v n'est pas arbitraire. Leur bonne sélection joue un rôle clé dans cette technique.

Dans l'exemple précédent si notre choix est $\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = e^x \end{cases}$, alors $\begin{cases} u(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$.

On obtient donc $\int_0^1 x e^x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 e^x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 e^x dx$ ce qui rend le calcul de l'intégrale voulue est très compliqué.

Application(9)

En utilisant la formule d'intégration par parties, Calculer les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_1^e x^2 \ln x dx$; $I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x - 1) e^{-\frac{x}{2}} dx$; $I_3 = \int_2^e \ln(x + 2) dx$ et $I_4 = \int_0^\pi x^2 \cos x dx$.

Exercice 37

- 1 Vérifier, pour tout $x \in [0; 1]$, que : $\frac{x^3 + x}{x + 1} = x^2 - x + 2 - \frac{2}{x + 1}$.
- 2 En utilisant la formule d'intégration par parties, Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 (3x^2 + 1) \ln(x + 1) dx$.

Exercice 38

En utilisant la formule d'intégration par parties, Calculer les intégrales suivantes :

- 1 $I_1 = \int_1^{e^2} x(\ln x)^2 dx$
- 2 $I_2 = \int_1^2 x\sqrt{3-x} dx$
- 3 $I_3 = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{x \ln x}{(x^2 + 1)^2} dx$
- 4 $I_4 = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$
- 5 $I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos x^2} dx$
- 6 $I_6 = \int_1^2 x 2^x dx$
- 7 $I_7 = \int_0^1 \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) dx$
- 8 $I_8 = \int_0^1 x^2 e^x dx$
- 9 $I_9 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x e^x dx$

4 Calcul d'aires et de volumes

1 Calcul des aires

Activité (2)

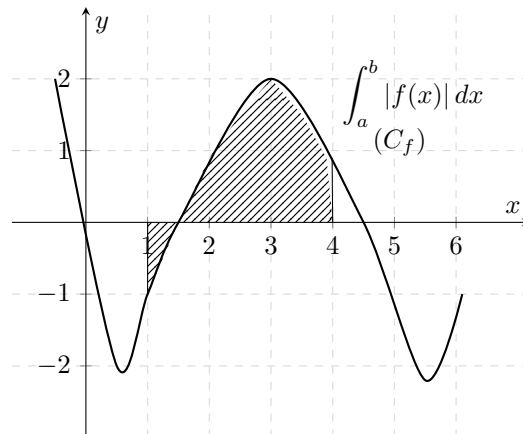
On considère la fonction définie par: $f(x) = -x + 2$ et (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ unité (1 cm)

- 1 Tracer (C_f) et colorier le domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$, puis donner une valeur de son aire en unités d'aires.
- 2 Calculer $\int_{-1}^3 |f(x)| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$. Qu'est-ce qu'on peut déduire ?

Propriété

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ ($a < b$). et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

L'aire du domaine délimité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b |f(x)| dx$ (en unité d'aire)



Application(10)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 1$ cm et $\|\vec{j}\| = \sqrt{2}$ cm. Soit f la fonction définie par: $f(x) = \sin(x)$

Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe de f et les droites d'équations : $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$.

Exercice 39

Soit f la fonction définie sur $]0; e[U]e; +\infty$ par : $f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$ et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2$ cm.

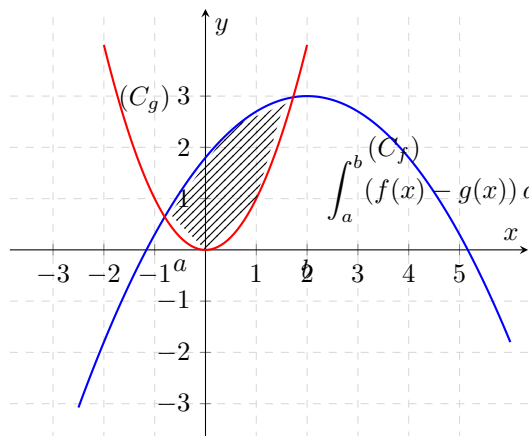
- 1 Montrer que $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1 - \ln x)} dx = \ln 2$. (Remarquer que $\frac{1}{x(1 - \ln x)} = \frac{\frac{1}{x}}{(1 - \ln x)}$)
- 2 Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan délimité par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$.

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$, (C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal.

Soit (Δ) le domaine délimité par les courbes (C_f) et (C_g) et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

L'aire du domaine (Δ) en unités d'aire est donnée par : $A(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.



Application (11)

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(0, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$ et $\|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$. On considère les fonctions f et g définies par: $f(x) = 2x^2 + 1$ et $g(x) = x^2 + x + 1$. Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes des fonctions f et g et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

Exercice 40

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x + 1 - (x^2 + 1)e^x$.

Et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$

- 1 Montrer que $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$, puis en déduire que: $\int_{-1}^0 xe^x dx = \frac{2}{e} - 1$.
- 2 En utilisant une intégration par parties, Montrer que: $\int_{-1}^0 (x^2 + 1)e^x dx = 3 \left(1 - \frac{2}{e}\right)$.
- 3 c Calculer en cm^2 , l'aire du Domaine plan délimité par (C_f) , la droite (D) d'équation $y = x + 1$ et les droites d'équations: $x = -1$ et $x = 0$.

2 Calcul des volumes

Propriété

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit (Σ) un solide limité par deux plans $z = a$ et $z = b$ et soit $S(t)$ est l'aire de l'intersection du solide (S) avec le plan $z = t$ ($a \leq t \leq b$).

le volume de ce solide est (en unités de volume): $v(s) = \int_a^b S(t) dt$.

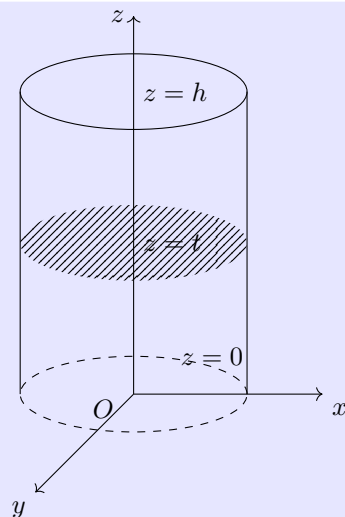
Exemple

volume V d'un cylindre de rayon R et de hauteur h .

L'intersection du plan $z = t$ avec le cylindre est un disque d'aire $S(t) = \pi R^2$.

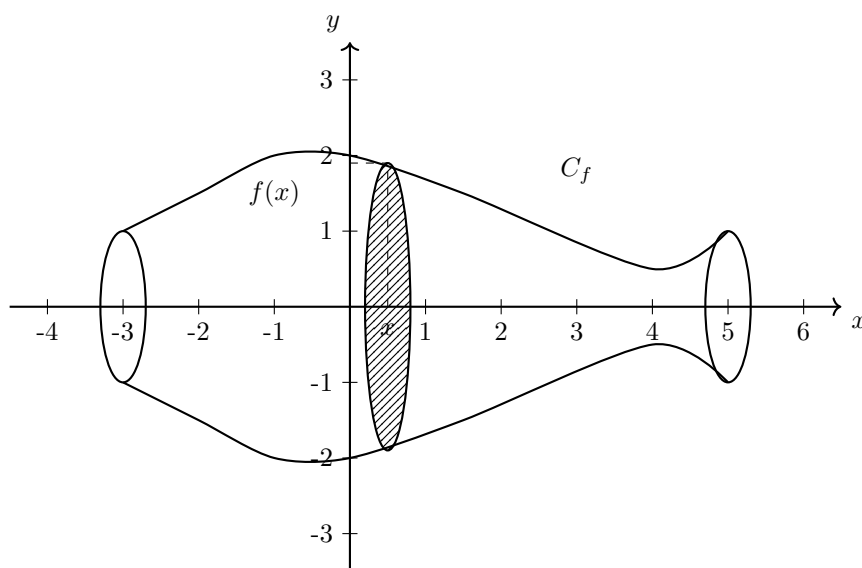
Puisque $t \rightarrow S(t)$ est continue sur $[0, h]$ alors le volume de cylindre est:

$$V = \int_0^h S(t) dt = \int_0^h \pi R^2 dt = \pi R^2 \int_0^h dt = \pi R^2 h \text{ cm}^3.$$



Propriété

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ ($a < b$), et (C_f) sa courbe représentative. Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe (C_f) autour de l'axe des abscisses un tour complet est donné par la formule : $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$ (en unités de volume).



Exemple

Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe de la fonction $x \rightarrow e^x$ sur $[0, 1]$

Autour de l'axe des abscisses un tour complet est donné par :

$$V = \pi \int_0^1 (f(x))^2 dx = \pi \int_0^1 (e^x)^2 dx = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{\pi}{2} [e^{2x}]_0^1 = \frac{\pi (e^2 - 1)}{2} \text{ u.a.}$$

Application(12)

Soit g la fonction numérique définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = xe^{\frac{1}{2}x}$.

Calculer Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe de la fonction g autour de l'axe des abscisses un tour complet.

Répondre à la même question pour la fonction $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\cos(x)}$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.