

Chapter 6

Primitives

1 Primitive d'une fonction sur un intervalle

Activité (1)

Soient f et F deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3 - 3x + 2$ et $F(x) = \frac{5}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$

- 1 Vérifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F'(x) = f(x)$ pour tout réel x . On dit que la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$
- 2 Montrer que $G(x) = \frac{5}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 4$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Si F est une primitive de f sur I , alors $F + c$ est aussi une fonction primitive de f sur I avec $c \in \mathbb{R}$.
- 3 Déterminer une primitive H de la fonction f tel que $H(1) = 0$

Définition

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que F est une primitive de la fonction f sur I , si F est dérivable sur I et pour tout $x \in I : F'(x) = f(x)$.



Exemple

- 1 La fonction $x \mapsto 5x + 4$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 5$.
- 2 La fonction $x \mapsto x^2 + 2x + 3$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 2x + 2$.
- 3 La fonction $x \mapsto 2\sqrt{x} + 7$ est une primitive sur $]0; +\infty[$ de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I .

Application(1)

Montrer que la fonction $x \mapsto x\sqrt{x+1} + \cos(x)$ sur admet une primitive sur $I = [-1, +\infty[$.

Propriété

Soit F une fonction primitive d'une fonction f sur I .

- 1 L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions $x \mapsto F(x) + c$ tel que $c \in \mathbb{R}$.
- 2 Pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive G de f sur I vérifiant $G(x_0) = y_0$.

Application(2)

- 1 Déterminer, l'ensemble des primitives des fonctions f et g sur l'intervalle I à déterminer sachant que $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5$ et $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$.
- 2 Déterminer la primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$, qui vérifie la condition indiquée : $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 8x - 7$ et $F(1) = 0$.

2 Tableau des primitives usuelles

Fonction	Primitives
$x \mapsto 0$	$x \mapsto c$
$x \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto ax + c$
$x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$x \mapsto x^r \quad (r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\})$	$x \mapsto \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x} + c$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + c$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + c$

$x \mapsto 1 + (\tan x)^2$	$x \mapsto \tan x + c$
$x \mapsto \cos(ax + b), (a \neq 0)$	$x \mapsto \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$
$x \mapsto \sin(ax + b), (a \neq 0)$	$x \mapsto -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$
$U' \times U^r \quad (r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\})$	$\frac{1}{r+1} U^{r+1} + c$
$\frac{U'V + UV'}{U^2}$	$\frac{U}{V} + c$
$\frac{U'V - UV'}{U^2}$	$-\frac{1}{U} + c$
$\frac{U'}{\sqrt{U}}$	$2\sqrt{U} + c$

Application(3)

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

① $f_1(x) = 2x^5 - 3x^2 - 1$

② $f_2(x) = \frac{1}{x^4} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt[4]{x^3}$

③ $f_3(x) = \sqrt{x} (x^2 + 2\sqrt{x})$

④ $f_4(x) = \sqrt{x+2}$

⑤ $f_5(x) = (2x+1)\sqrt{2x+1}$

⑥ $f_6(x) = \sin(5-2x)$

⑦ $f_7(x) = \cos(3x-1)$

⑧ $f_8(x) = (3x^2-1)(x^3-x)^2$ $f_9(x) = \cos x \cdot (\sin x)^4$

⑨ $f_{10}(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

Primitives

2 Primitives

Activité (1)

Soient f et F deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3 - 3x + 2$ et $F(x) = \frac{5}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$

- 1 Vérifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F'(x) = f(x)$ pour tout réel x .
On dit que la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$
- 2 Montrer que $G(x) = \frac{5}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 4$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Si F est une primitive de f sur I , alors $F + c$ est aussi une fonction primitive de f sur I avec $c \in \mathbb{R}$.
- 3 Déterminer une primitive H de la fonction f tel que $H(1) = 0$

Application(1)

Montrer que la fonction $x \mapsto x\sqrt{x+1} + \cos(x)$ sur admet une primitive sur $I = [-1, +\infty[$.

Application(2)

- 1 Déterminer, l'ensemble des primitives des fonctions f et g sur l'intervalle I à déterminer sachant que

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 5 \text{ et } g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}.$$

- 2 Déterminer la primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$, qui vérifie la condition indiquée :

$$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 8x - 7 \quad \text{et} \quad F(1) = 0$$

Application(3)

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

① $f_1(x) = 2x^5 - 3x^2 - 1$

② $f_2(x) = \frac{1}{x^4} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt[4]{x^3}$

③ $f_3(x) = \sqrt{x} (x^2 + 2\sqrt{x})$

④ $f_4(x) = \sqrt{x+2}$

⑤ $f_5(x) = (2x+1)\sqrt{2x+1}$

⑥ $f_6(x) = \sin(5-2x)$

⑦ $f_7(x) = \cos(3x-1)$

⑧ $f_8(x) = (3x^2-1)(x^3-x)^2$

⑨ $f_9(x) = \cos x \cdot (\sin x)^4$

⑩ $f_{10}(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$