

Chapter 5

Nombres complexes

1 L'ensemble des nombres complexes

1 L'ensemble $\mathbb{C}$ -L'écriture algébrique

Théorème

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ appelé l'ensemble des nombres complexes, il contient l'ensemble $\mathbb{R}$ et il vérifie ce qui suit :

- 1 L'ensemble $\mathbb{C}$ contient un élément irréel i qui vérifie $i^2 = -1$.
- 2 Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont deux nombres réels.

Vocabulaires

- 1 L'écriture $z = a + ib$ s'appelle l'écriture algébrique du nombre complexe z .
- 2 Le nombre a est appelé partie réelle du nombre z qu'on note par $\mathcal{R}e(z)$.
- 3 Le nombre b est appelé partie imaginaire du nombre z qu'on note $\mathcal{I}m(z)$.
- 4 Tout nombre qui s'écrit sous la forme ib est dit nombre imaginaire pur, et l'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Exemple

- 1 $z_1 = 5 + 7i$, alors $\mathcal{R}e(z_1) = 5$ et $\mathcal{I}m(z_1) = 7$.
- 2 $z_2 = 1 - i$, alors $\mathcal{R}e(z_2) = 1$ et $\mathcal{I}m(z_2) = -1$.
- 3 $z_3 = 5$, alors $\mathcal{R}e(z_3) = 5$ et $\mathcal{I}m(z_3) = 0$.
- 4 $z_4 = 3i$, alors $\mathcal{R}e(z_4) = 0$ et $\mathcal{I}m(z_4) = 3$ (on a z_4 est un nombre imaginaire pur)
- 5 $z_5 = 1 - \sqrt{5} + \sqrt{2} - \frac{\pi}{2} + 4i$, alors $\mathcal{R}e(z_5) = 1 - \sqrt{5} + \sqrt{2} - \frac{\pi}{2}$ et $\mathcal{I}m(z_5) = 4$.

Application(1)

Ecrire sous la forme algébrique les nombres suivants : $z_1 = 4i - (2 + 5i)$ et $z_2 = 3(1 + i) + i(i + 1)$.

Propriété

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes on a :

- 1 $z = z' \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'.$
- 2 $z = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ et } b = 0.$

Application(2)

Déterminer la valeur des nombres réels a et b dans les cas suivants :

- 1 $(1 + 2i)a + b = 5 - 4i$
- 2 $(2 + i)a + (3 - 2i)b = 1 + 4i$

2 Opérations dans $\mathbb{C}$

Les opérations de la somme et le produit de $\mathbb{R}$ se prolongent en $\mathbb{C}$ et elles ont les mêmes propriétés.

Propriété

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. On a :

- 1 $z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = a + b + i(b + b').$
- 2 $z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = aa' - bb' + i(ab' + a'b).$
- 3 $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib) \times (a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} (z \neq 0)$

Application(3)

Ecrire sous la forme algébrique les nombres suivants:

- | | |
|--|---|
| 1 $z_1 = (2 + 3i)(-1 + i)$ | 4 $z_4 = -\frac{1}{4i}$ |
| 2 $z_2 = (1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)$ | 5 $z_5 = \frac{1 + i}{1 - i}$ |
| 3 $z_3 = \frac{1}{2 + 3i} + (2 + i)^2$ | 6 $z_6 = \left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^{14}$ |



Remarque

! Pour tout nombre complexe z , on a : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$ et $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$.

Exercice 23

- 1 Soit $z = (x + i)[(x + 5) - i(x - 7)]$ tel que x est réel. Déterminer le réel x dans chacun des cas:

a $z \in \mathbb{R}$.

b $z \in i\mathbb{R}$.

c $\mathcal{I}m(z) = 2\mathcal{R}e(z)$.

- 2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes $(E_1) : iZ - 1 = Z + 3i$ et $(E_2) : \frac{Z+i}{Z-i} = i$.

Exercice 24

Soit M un point du plan complexe d'affixe $z = x + iy$, M' le point d'affixe $z' = \frac{z+1}{z-1}$.

- 1 Ecrire z' sous la forme algébrique.
- 2 Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que z' est un nombre réel.
- 3 Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que z' est un nombre imaginaire pur.

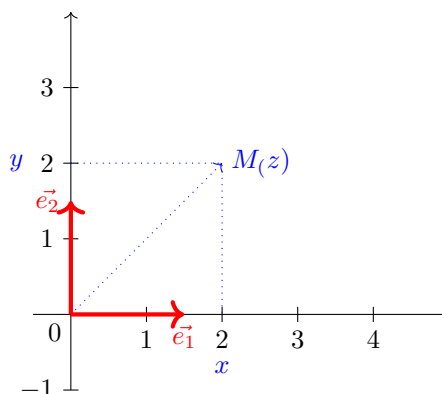
2 Représentation géométrique d'un nombre complexe

1 Définitions

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$.

Définition

- 1 Tout nombre complexe $z = x + iy$ tels que x et y deux réels associé à un unique point M , appelé l'image de z , des coordonnées (x, y) et on écrit $M(z)$.
- 2 Tout point $M(x; y)$, le nombre complexe $z = x + iy$ s'appelle l'affixe du point M et on écrit $z = aff(M)$.
- 3 Le vecteur $\vec{u}(x; y)$ s'appelle l'image vectoriel du nombre $z = x + iy$ et le nombre z s'appelle l'affixe du vecteur $\vec{u}$ et on écrit $z = aff(\vec{u})$.



Application(4)

Construire dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ les points $A(-1+i); B(2-2i); C\left(\frac{1}{2}i\right)$ et $D(2+2i)$.

Propriété

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe. On a :

- 1 $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
- 2 L'affixe du point I le milieu du segment $[AB]$ est $\frac{z_A + z_B}{2}$.

Démonstration

On sait que $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$, alors $\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A) = x_B + iy_B - (x_A + iy_A) = z_B - z_A$.

Application(5)

On considère dans le plan complexe les points : $A(2i); B(1-i)$ et $C(3)$

- 1 Déterminer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.
- 2 Déterminer l'affixe du point D sachant que $ABCD$ est un parallélogramme.
- 3 Déterminer l'affixe du point I le centre du parallélogramme $ABCD$.

2 Colinéarité de deux points

Propriété

Soient $A(z_A), B(z_B)$ et $C(z_C)$ trois points du plan complexe. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$.

Démonstration

Les points A, B et C sont alignés si et seulement il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$. Et on a : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow z_B - z_A = k(z_C - z_A) \Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = k \in \mathbb{R}$.

Application(6)

On considère dans le plan complexe les points $A(4; -6), B(-2; 3)$ et $C\left(-1; \frac{3}{2}\right)$. Montrer que les points A, B et C sont alignés.

3 Points cocycliques

Propriété

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points non alignés et deux à deux distincts du plan complexe. Les points A, B, C et D sont cocycliques (appartiennent au même cercle) si et seulement si : $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} \times \frac{z_C - z_D}{z_A - z_D} \in \mathbb{R}$.

Application(7)

On considère dans le plan complexe les points $A(1 + i)$, $B(3 + i)$, $C(2 + 2i)$ et $D(2)$. Montrer que les points A, B, C et D sont cocycliques.

4 Conjugué d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = a + ib$, où a et b sont deux réels. Le nombre $a - ib$ est appelé le conjugué du nombre complexe z , et on le note par $\bar{z}$.



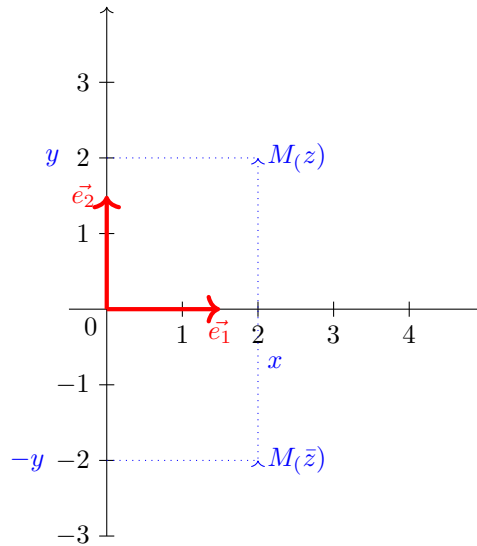
Exemple

- 1 $z_1 = 5 + 6i$, alors $\bar{z}_1 = 5 - 6i$.
- 2 $z_2 = -1 - i$, alors $\bar{z}_2 = -1 + i$.
- 3 $z_3 = i$, alors $\bar{z}_3 = -i$.
- 4 $z_4 = 6$, alors $\bar{z}_4 = 6$.



Interprétation géométrique

Soit z un nombre complexe. Dans le plan complexe, le point $M(\bar{z})$ est symétrique au point $M(z)$ par rapport à l'axe réel.



Propriété

Soient z et z' deux nombres complexes et n un nombre relatif.

- 1 $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$;
- 2 $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$;
- 3 $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \quad (z' \neq 0)$;
- 4 $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n \quad (z' \neq 0)$.



Exemple

- 1 $\overline{(2 - i)(1 + i)^2} = (1 + i)(-2i) = 2 - 2i$.
- 2 $\frac{1}{\sqrt{2}i - \sqrt{2}} = \frac{1}{-\sqrt{2} - \sqrt{2}i} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{4}$.

Application(8)

Soit z un nombre complexe différent de $-2i$. Simplifier l'expression $\frac{\bar{iz}}{z + 2i} + i\left(\frac{3 + z}{\bar{z} - 2i}\right)$.

Exercice 25

On pose $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

- 1
 - a Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $3iz - \bar{z}$.
 - b Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $3iz - \bar{z} = 8i$.
 - c Déterminer les nombres complexes z pour que $3iz - \bar{z}$ soit un nombre imaginaire pur.
- 2 Résoudre l'équation $\frac{4z - 2}{z + 1} = -3 + i$.

Propriété

Pour tout nombre complexe z , On a:

- 1 $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$.
- 2 $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$.
- 3 $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$.

Application(9)

On pose : $u = \frac{2+3i}{3+2i}$ et $v = \frac{2-3i}{3-2i}$. Sans calculer $u+v$ et $u-v$, Montrer que $u+v$ est réel et que $u-v$ est imaginaire pur.

5 Module d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = x + iy$, où x et y deux nombres réels, un nombre complexe. Le module du nombre complexe z , est le nombre réel positif noté $|z|$ et qui est défini par : $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Exemple

- 1 $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
- 2 $|1 - i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- 3 $|i| = \sqrt{1^2} = 1$
- 4 $|-i| = \sqrt{(-1)^2} = 1$
- 5 $\left| \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = 1$

Propriété

Soient z et z' nombres complexes et n un nombre relatif.

- 1 $|z| = |-z| = |\bar{z}|$.
- 2 $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.
- 3 $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. - $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ ($z' \neq 0$).
- 4 $|z^n| = |z|^n$, ($z \neq 0$).

Application(10)

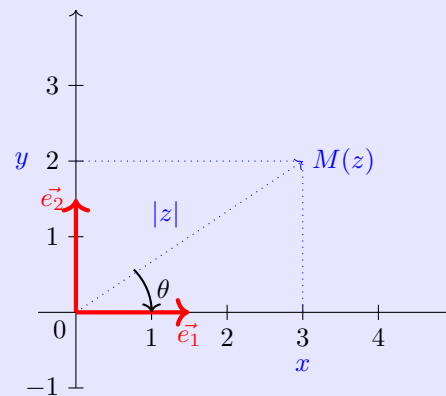
On pose : $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

- 1 Calculer $|z_1|$ et $|z_2|$.
- 2 En déduire le module des nombres suivants : $z_1 \times z_2, z_1^6$ et $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$.



Interprétation géométrique

Soit $M(z)$ un point du plan complexe tels que $z = x + iy$. On sait que $OM = \|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Et on a $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Alors $OM = |z|$.



Propriété

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe. On a : $AB = |z_B - z_A|$.

Application(11)

Dans le plan complexe, on considère les points $A(-1 + 6i), B(1 + 9i)$ et $C(2 + 4i)$. Montrer que le triangle ABC est isocèle.

Exercice 26

Déterminer dans le plan complexe l'ensemble (E) des points $M(z)$ dans les cas suivants:

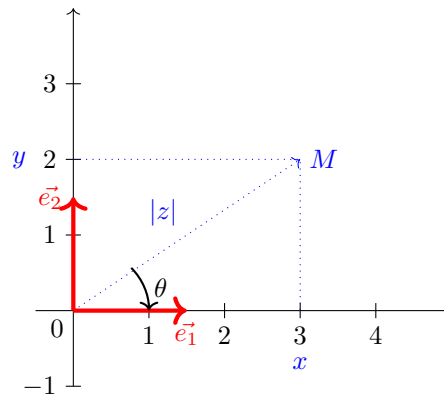
- 1 $|z - 2 + i| = |z - 4i|$;
- 2 $|z + i| = |z - 1 + i|$;
- 3 $|z - 2 + i| = 4$;
- 4 $|iz - 2| = |z + 1 - i|$;
- 5 $|iz| = |\bar{z} + 1 - i|$.

3

La forme géométrique d'un nombre complexe

1 Argument d'un nombre complexe

On muni le plan ($\mathcal{P}$) par un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soit $M(z)$ un point du plan complexe ($\mathcal{P}$) différent de O . On appelle argument du nombre complexe z , la mesure de l'angle orienté $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$ qu'on note par le symbole $\arg(z)$. Et on a $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$ (c-à-d $\arg(z) = \theta + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}$).



Propriété

Soit z un nombre complexe.

- 1 $z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[2\pi]$.
- 2 $z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi[2\pi]$.
- 3 $z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- 4 $z \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.



Exemple

- 1 $\arg(2i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$
- 2 $\arg(\sqrt{5} - \sqrt{7}) \equiv \pi[2\pi]$
- 3 $\arg(1 + \sqrt{3}) \equiv 0[2\pi]$
- 4 $\arg(-2i) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Propriété

Soit z un nombre complexe non nul. • $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$. $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)[2\pi]$.

2 La forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul et θ son argument. On sait que $\cos \theta = \frac{x}{|z|}$ et $\sin \theta = \frac{y}{|z|}$ alors $x = |z| \cos \theta$ et $y = |z| \sin \theta$. C.à.d. $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$

Cette écriture s'appelle la forme trigonométrique du nombre complexe z et on le note par $[|z|; \theta]$.



Exemple

↗ Déterminons la forme trigonométrique des deux nombres complexes $z = 2 + 2i$ et $z' = 2 - 2i$.

Application(12)

Ecrire sous la forme trigonométrique les nombres complexes suivants:

1 $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

2 $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

3 $z_3 = -1 - i\sqrt{3}$

4 $z_4 = -2\sqrt{3} + 2i$

5 $z_5 = 4$

6 $z_6 = -7$

Propriété

Soient z et z' deux éléments de $\mathbb{C}^*$ tels que $z = [r; \theta]$ et $z' = [r'; \theta']$ et $n \in \mathbb{N}$:

1 $[r, \theta] = [r', \theta'] \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' + 2k\pi/k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

2 $z \times z' = [r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr', \theta + \theta']$.

3 $\frac{1}{z} = \frac{1}{[r, \theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right]$.

4 $\frac{z}{z'} = \frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$.

5 $z^n = [r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$.

Application(13)

On considère z_1, z_2 et z_3 trois nombres complexes non nuls tels que $\arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$. Déterminer l'argument du nombre z_3 dans les cas suivants :

1 $\frac{z_3}{z_2} = z_1^2$.

2 $z_3 \times \overline{z_2} = 4z_1$.

Exercice 27

On pose $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i$.

1 Ecrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique puis en déduire la forme trigonométrique du nombre $Z = \frac{z_1^2}{z_2}$.

2 Ecrire Z sous la forme algébrique.

3 En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

- 4 Montrer que $z^{12} \in \mathbb{R}$.

3 Angle entre deux vecteurs - Argument d'un nombre complexe

Propriété

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ des points du plan complexe. On a:

- 1 $(\vec{e}_1, \vec{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) [2\pi]$.
- 2 $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$.
- 3 $(\vec{AB}, \vec{DC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$.

Application(14)

On considère dans le plan complexe les points $A(2; 2)$, $B(2; -1)$, $C(4; 2)$ et $D(6; 2)$.

- 1 Calculer $(\vec{AD}, \vec{AC})$, que peut-on déduire ?
- 2 Calculer $(\vec{AC}, \vec{AB})$. Que peut-on dire de la position des deux droites (AB) et (AC)?

Exercice 28

Dans le plan complexe on considère les points A, B et C d'affixes respectivement $z_A = \sqrt{3} - i$, $z_B = -z_A$ et $z_C = \sqrt{3} + 3i$ et soit D le point symétrique de C par rapport à l'axe réel.

- 1 Calculer $\frac{z_A - z_D}{z_A - z_C}$ puis déduire que les points A, D et C sont alignés.
- 2 Vérifier que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$.
- 3 Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 29

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = \sqrt{3}$; $b = 2 + i\sqrt{3}$; $c = 2 - \sqrt{3} + 2i$; $d = (2 - \sqrt{3})i$.
Montrer que ABCD est un carré.

4

Représentation complexe des transformations usuelles

1 La translation

Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u}(z_{\vec{u}})$ et soit $M'(z_{M'})$ l'image du point $M(z_M)$ par la translation $t_{\vec{u}}$. On a :

$$t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{\vec{u}}$$

$$\Leftrightarrow z_{M'} - z_M = z_{\vec{u}}$$

$$\Leftrightarrow z_{M'} = z_M + z_{\vec{u}}$$

Cette écriture s'appelle la représentation complexe de la translation $t_{\vec{u}}$.

Application(15)

On considère la translation t de vecteur $\vec{u}(-1 + 2i)$.

- 1 Déterminer la représentation complexe de la translation t .
- 2 Déterminer l'abscisse du point A' l'image de $A(2i)$ par la translation t
- 3 Déterminer l'abscisse de B tels que $t(B) = B'$ et $B'(2 - 3i)$.

2 L'homothétie

Soient $\Omega(z_{\Omega})$ un point du plan complexe et k un élément de $\mathbb{R}^*$. Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport k . Soit $M'(z_{M'})$ l'image de $M(z_M)$ par l'homothétie h . On a :

$$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$$

$$\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = k z_{\overrightarrow{\Omega M}}$$

$$\Leftrightarrow z_{M'} - z_{\Omega} = k(z_M - z_{\Omega})$$

$$\Leftrightarrow z_{M'} = z_{\Omega} + k(z_M - z_{\Omega})$$

$$\Leftrightarrow z_{M'} = k z_M + z_{\Omega}(1 - k)$$

Cette écriture s'appelle la représentation complexe de l'homothétie h .

Application(16)

On considère l'homothétie de centre $\Omega(2 - i)$ et de rapport 4.

- 1 Déterminer la représentation complexe de l'homothétie h .
- 2 Déterminer l'abscisse du point A' l'image de $A(1 + i)$ par l'homothétie h .
- 3 Déterminer l'abscisse de B où $h(B) = B'$ et $B'(2i)$.

Exercice 30

Connaitre la nature des transformations usuelles suivantes dont la représentation complexe est comme suit:

- 1 $z' = z - 3i$.
- 2 $z' + 2i = -5(z + 2i)$.
- 3 $z' = 1 - z$.
- 4 $z' = 4z - 3i$.

5 Notation exponentielle - Applications trigonométriques

1 Notation exponentielle d'un nombre complexe

Activité

- 1 On considère le nombre complexe $z = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{6}$. Montrer que $z = \left[4\sqrt{2}; \frac{\pi}{3}\right]$.
On écrit z sous la forme $z = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$. Cette écriture s'appelle une forme exponentielle du nombre complexe z .
- 2 Donner une forme exponentielle des nombres complexes suivants: $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = 3 + 3i\sqrt{3}$ et $z_4 = -3$.

Définition

Tout nombre complexe z de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme $z = re^{i\theta}$. Cette écriture s'appelle la forme exponentielle du nombre z .



Exemple

- 1 $e^{i\pi} = -1$.
- 2 $2e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Application(17)

- 1 Ecrire sous la forme algébrique les nombres complexes : $z_1 = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$.
- 2 Ecrire sous la forme exponentielle le nombre complexe $z = -3\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)$.

Propriété

Soient r, r', θ et θ' des nombres réels. On a :

- 1 $|e^{i\theta}| = 1.$
- 2 $\arg(e^{i\theta}) \equiv \theta[2\pi].$
- 3 $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}.$
- 4 $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}.$
- 5 $\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{1}{r}\overline{e^{i\theta}}.$
- 6 $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}.$
- 7 $(\forall n \in \mathbb{Z}) (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}.$

Application(18)

On pose : $z_1 = 1 - i, z_2 = 2i$ et $z_3 = 3 + 3i\sqrt{3}$. Ecrire sous la forme exponentielle les nombres suivants :
 $a = \frac{z_3}{z_1}, b = z_1^8$ et $c = \frac{z_1}{z_2 z_3}$

2 Formule de Moivre-Formules d'Euler-Applications

5.5.2.1 Formule de Moivre

On a : $(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall \theta \in \mathbb{R}) : (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. Ainsi : $(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall \theta \in \mathbb{R}) : (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$. Cette égalité s'appelle la formule de Moivre.

Propriété

$$(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall \theta \in \mathbb{R}) : (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Application(19)

- 1 Ecrire par deux méthodes différentes $(\cos(x) + i \sin(x))^2$ sous la forme algébrique.
- 2 En déduire la valeur de $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

5.5.2.2 Formules d'Euler

on sait que: $(\forall \theta \in \mathbb{R}) \begin{cases} e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) & (1) \\ e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i \sin(\theta) \end{cases}$ La somme des deux égalités donne : $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$. En soustrayant l'équation (1) de l'équation (2) on obtient : $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. ces deux formules résultantes s'appelle les formules d'Euler.

Propriété

$$(\forall \theta \in \mathbb{R}) \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Application(20)

- 1 En utilisant les formules d'Euler, montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : (\cos(x))^2 = \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2}$.
On dit dans ce cas-là qu'on a linéarisé le polynôme trigonométrique $(\cos(x))^2$.
- 2 Linéariser les expressions suivantes $\sin^2(x)$ et $\cos^3(x)$.

6 Equations de second degré dans $\mathbb{C}$

Propriété

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$.

- 1 Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ s'appelle le discriminant de l'équation.
- 2 Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- 3 Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution réelle double $z_0 = -\frac{b}{2a}$.
- 4 Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées distinctes : $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \bar{z}_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Application(21)

- 1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$$\cdot (E_1) : z^2 = -4 \quad \cdot (E_2) : z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0 \quad \cdot (E_3) : 2z^2 - 3z + 2 = 0$$

- 2 On pose $p(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$.

- a Déterminer les réels a et b tels que : $(\forall z \in \mathbb{C}) p(z) = (z - 4)(z^2 + az + b)$.
- b Résoudre dans $\mathbb{C} : p(z) = 0$.

Soit R une rotation de centre $\Omega(z_\Omega)$ et de mesure d'angle θ , et soit $M'(z_{M'})$ l'image de

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} |z_{M'} - z_\Omega| = |z_M - z_\Omega| \\ \arg\left(\frac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|z_{M'} - z_\Omega|}{|z_M - z_\Omega|} = 1 \\ \arg\left(\frac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \frac{z_{M'} - z_\Omega}{z_M - z_\Omega} = e^{i\theta} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow z_{M'} = (z_M - z_\Omega) e^{i\theta} + z_\Omega$$

Cette écriture s'appelle la représentation complexe de la rotation R .

Propriété

Soit R une rotation de centre $\Omega(z_\Omega)$ et de mesure d'angle θ , et soit $M'(z_{M'})$ l'image de $M(z_M)$ par la rotation R . On a : $z_{M'} = (z_M - z_\Omega) e^{i\theta} + z_\Omega$.

Application(22)

- 1 On considère la rotation R de centre $\Omega(2 + 3i)$ et de mesure d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 - a Déterminer la représentation complexe de la rotation R .
 - b Déterminer l'axe du point A' l'image $A(2 - i)$ par la rotation R .
 - c Déterminer l'axe du point B avec $R(B) = B'$ et $B'(-2 - 4i)$.
- 2 Déterminer l'image du point $M(4i)$ par la rotation de centre O et de mesure d'angle $\frac{5\pi}{6}$.

Exercice 31

On considère la transformation F représentée par : $z' = -iz + i - 1$.

- 1 Montrer qu'il existe un point unique M du plan complexe $(\mathcal{P})$ invariant par la transformation F . Notons ce point par Ω et son affixe par ω .
- 2 Vérifier, pour tout $M(z)$ et $M'(z')$ du plan $(\mathcal{P})$, que :

$$F(M) = M' \Leftrightarrow z' - \omega = -i(z - \omega)$$

- 3 En déduire la nature de la transformation F .

Exercice 32

- 1 On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) : z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0$$

a Vérifier que $\Delta = -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$.

b En déduire les solutions de l'équation (E).

- 2) On considère les nombres complexes $a = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$; $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

a Vérifier que $b\bar{c} = a$ puis déduire que: $ac = 4b$.

b Écrire les deux nombres complexes a et b sous forme trigonométrique.

c En déduire que $a = 4 \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right)$.

- 3 Dans le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points B ; C et D d'affixes respectives b ; c et d tel que $d = a^4$. Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$.

a Vérifier que $z' = \frac{1}{4}az$.

b Déterminer l'image du point C par la rotation R .

c Déterminer la nature du triangle OBC .

d Montrer que $a^4 = 128b$ et en déduire que les points O ; B et D sont alignés.