

Chapter 4

Fonctions logarithmiques

1 Fonction Logarithme Népérien

Activité (1)

- 1 Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ admet une primitive sur $]0, +\infty[$.
La primitive de f sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 est appelée fonction logarithme népérien et se note par $\ln$.
- 2 Étudier les variations de la fonction $\ln$ sur $]0, +\infty[$.
- 3 Démontrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_*^{+2} : \ln(x) > \ln(y) \Leftrightarrow x > y$.
- 4 Étudier le signe de la fonction $\ln$ sur $]0, +\infty[$.

1 Définition et propriétés

Définition

La fonction est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1, et se note par **(Ln)** ou **Log**.



Remarque

Le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est $D = \{x \in \mathbb{R} / u(x) > 0\}$.

Application(1)

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

- | | |
|--|--------------------------|
| 1 $f(x) = \ln(3x + 9)$ | 3 $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$ |
| 2 $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$ | 4 $f(x) = \ln(2x - 1)$ |

Propriété

- 1 La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- 2 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_*^{+2} : \ln(x) > \ln(y) \Leftrightarrow x > y$.
- 3 $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_*^{+2} : \ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$.

Application(2)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes:

- 1 $\ln(x-1) = \ln(2-x)$
- 2 $\ln(x^2 - 2x) = 0$
- 3 $\ln(2x-1) \geq \ln(x)$
- 4 $\ln(x^2 - 3x + 3) < 0$

Propriété

- 1 $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
- 2 $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Application(3)

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants:

- 1 $f(x) = \ln(\ln x)$
- 2 $f(x) = \sqrt{(x-2)\ln(x)}$

Propriété

Soient a et b deux réels strictement positifs et $r \in \mathbb{Q}^*$, on a:

- 1 $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- 2 $\ln(a^r) = r \ln(a)$
- 3 $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- 4 $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$



Exemple

- 1 $\ln(\sqrt{8}) = \frac{1}{2} \ln(8) = \frac{1}{2} \ln(2^3) = \frac{3}{2} \ln(2)$.
- 2 $\ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln(3) - \ln(4) + \ln(4) - \ln(3) = 0$.

Application(4)

- 1 Simplifier les expressions suivantes $A = \ln(9) + \ln \sqrt[3]{3} - \ln(81)$ et $B = \ln(\sqrt{2+\sqrt{2}}) + \ln(\sqrt{2-\sqrt{2}})$.
- 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $(E) : \ln(x^2 - 1) + 2\ln(2) = \ln(4x - 1)$.

Exercice 13

- 1 Soient a et b deux nombres de $\mathbb{R}^*_+$. Simplifier le nombre suivant:

$$A = \ln(ab^2) - \ln(\sqrt[3]{a^2b^5}) + \ln\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) - \ln(\sqrt[4]{a^2b^6})$$

- 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\ln(x-1) + \ln(x-3) = \ln(3)$.

Propriété

- 1 L'équation $\ln(x) = 1$ admet une solution unique sur $]0, +\infty[$ qui se note par e ($e \simeq 2,71$).
- 2 Pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a : $\ln(e^r) = r$.



Exemple

Résolvons l'équation $4\ln(x) = 3$. Soit $x > 0$. On a $4\ln(x) = 3 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \ln\left(e^{\frac{3}{4}}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{4}}$$

Puisque $e^{\frac{3}{4}} > 0$, alors l'ensemble de solutions de cette équation est $S = \left\{e^{\frac{3}{4}}\right\}$.

Application(5)

- 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$.
- 2 En déduire les solutions de l'équation $\ln(x)^2 - 4\ln(x) + 3 = 0$.

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{R}$ ce qui suit:

1 $\ln^2 x - \ln x = 0$

3
$$\begin{cases} \ln x^2 + \ln y^5 = 16 \\ \ln x^3 + \ln y^3 = 6 \end{cases}$$

2 $\ln^2(x) + \ln(x) - 6 \geq 0$

4
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{cases}$$

2 Limites usuelles

Propriété

$$① \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$② \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

$$④ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$⑤ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$⑥ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$⑦ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0.$$

$$⑧ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$



Exemple

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - x$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 \right) = -\infty$ parce que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} - 1 = -1$.

Application(6)

Calculer les limites suivantes:

$$① \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - \sqrt{x}$$

$$② \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$③ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 4}{x^2}$$

$$④ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{x}{x+1} \right)$$

$$⑤ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$$

$$⑥ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^3}$$

$$⑦ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln^2 x - \ln x + 1$$

$$⑧ \lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(2-x)$$

$$⑨ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(\frac{x}{3})}{x-3}$$

Exercice 15

Calculer les limites suivantes:

$$① \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \ln x$$

$$② \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 5 \ln x$$

$$③ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 (\ln x)^3$$

$$④ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x}$$

$$⑤ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^3 x}{x^2}$$

$$⑥ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$$

$$⑦ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x + \ln x}$$

$$⑧ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x+3)}{x^2+1}$$

$$⑨ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{x^2 + x + 1}{3 + 2x^2} \right)$$

$$⑩ \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$$

$$⑪ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln^2 x - \ln x}{1 + \ln x}$$

$$⑫ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x^2 - x)}{2x}$$

3 Etude de la fonction $x \mapsto \ln x$

4.1.3.1 Tableau de variations

x	0	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	$+\infty$

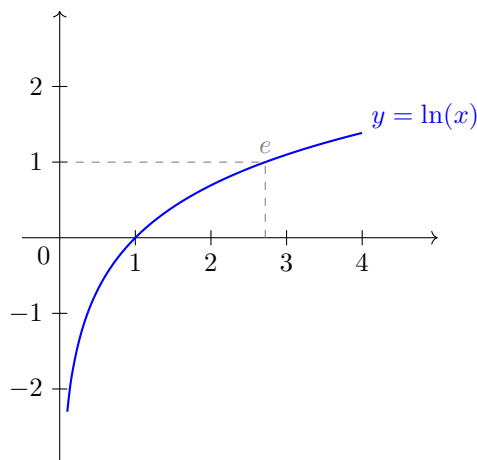
4.1.3.2 Les branches infinies

- 1 On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, alors l'axe des ordonnées est une asymptote verticale de $(C_{\ln})$.
- 2 On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, alors la courbe $(C_{\ln})$ admet une branche parabolique direction l'axe des abscisses.

4.1.3.3 Concavité de la courbe de $x \mapsto \ln(x)$

Pour tout $x > 0$, on a $(\ln(x))'' = \frac{-1}{x^2} < 0$, alors la courbe $(C_{\ln})$ est concave.

4.1.3.4 Représentation graphique de $x \mapsto \ln(x)$



4 Dérivée de la fonction $x \mapsto \ln x$

Propriété

- 1 Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I , alors la fonction $f : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et on a : $(\forall x \in I) : f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.
- 2 si u est une fonction dérivable et ne s'annule pas sur l'intervalle I , alors la fonction $f : x \mapsto \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I et on a : $(\forall x \in I) : f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.



Exemple

On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(\sqrt{x})$. Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable et strictement positive sur $]0, +\infty[$, alors la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Et on a : $(\forall x \in]0, +\infty[) : f'(x) = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$.

Application(7)

- 1 Montrer que $f \mapsto \ln(x^2 - x + 1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis déterminer sa dérivée.
- 2 Déterminer f' dans les cas suivants:

a $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 4})$

b $f(x) = \ln(\ln x)$

c $f(x) = \frac{x}{\ln(2x - 1)}$



Corollaire

Soit u est une fonction dérivable et ne s'annule pas sur un intervalle I .

Les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto \ln|u(x)| + c$ tel que $c \in \mathbb{R}$.



Exemple

Déterminons les primitives de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 + 4} - \frac{1}{4x + 3}$ sur l'intervalle $I =]-\frac{3}{4}, +\infty[$.

On a $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(x^2 + 4)'}{x^2 + 4} - \frac{1}{4} \times \frac{(4x + 3)'}{4x + 3}$.

Donc les primitives de la fonction f sur $I =]-\frac{3}{4}, +\infty[$ sont $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(|x^2 + 4|) - \frac{1}{4} \ln(|4x + 3|) + c$.

C'est-à-dire $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) - \frac{1}{4} \ln(4x + 3) + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

Application(8)

Déterminer l'ensemble des primitives de f dans les cas suivants:

1 $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1}$

3 $f(x) = \frac{x}{x + 1}$

2 $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$

4 $f(x) = \tan x$

1 Définition et propriétés

Définition

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

La fonction logarithme de base a est la fonction, notée par $\log_a(x)$, définie sur $]0, +\infty[$ par $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.



Remarque

1 $-\log_e(x) = \ln(x)$

3 $\log_a(1) = 0$

2 $\log_a(a) = 1$

4 $\log_a(a^r) = r (r \in \mathbb{Q})$

Propriété

Pour tout réels strictement positifs x et y et pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a :

1 $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

3 $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$.

2 $\log_a(x^r) = r \log_a(x)$.

4 $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.



Exemple

On a :

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{2}}(2^4) &= 4 \log_{\frac{1}{2}}(2) \\ &= -4 \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = -4\end{aligned}$$

Application(9)

Simplifier le nombre suivant : $A = \log_2(8) - \log_3(27) + \log_5\left(\frac{1}{125}\right)$.

4.2.1.1 Etude de la fonction $\log_a$

Propriété

Soit $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.

- 1 Si $a > 1$, alors la fonction $\log_a$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- 2 Si $0 < a < 1$, alors la fonction $\log_a$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Preuve

La fonction $\log_a$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a $(\forall x \in]0, +\infty[) : \log'_a(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$. Donc le signe de $\log_a(x)$ dépend du signe de $\ln a$, ce qui nous amène à discuter deux cas:

- 1 $a > 1$ (c.-à-d. $\ln a > 0$)
- 2 $0 < a < 1$ (c.-à-d. $\ln a < 0$)

x	0	$+\infty$
$\ln(x)$		$+\infty$
		$-\infty$

x	0	$+\infty$
$\ln(x)$		$+\infty$
	$-\infty$	

Conséquence

Pour tout réels strictement positifs x et y . On a:

- 1 Si $a > 1$, alors $\log_a(x) > \log_a(y) \Leftrightarrow x > y$.
- 2 Si $0 < a < 1$, alors $\log_a(x) > \log_a(y) \Leftrightarrow x < y$.

Application(10)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

- 1 $\log_{\frac{1}{2}}(2-x) \leq \log_{\frac{1}{2}}(x+4)$
- 2 $\log_3(2-x) \leq \log_3(x+4)$

4.2.1.2 Fonction logarithme décimal

Définition

La fonction logarithme décimal est la fonction logarithme de base 10. Elle est notée $\log$ et On a $(\forall x \in]0, +\infty[) : \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.



Remarque

- 1 $\log(1) = 0$
- 2 $\log(10) = 1$
- 3 $\log(10^r) = r (r \in \mathbb{Q})$



Exemple

$$\log(0,001) = \log(10^{-3}) = -3.$$

Application(11)

Simplifier le nombre suivant : $A = \log(1000) - \log(0,0001) + \log\left(\frac{1}{10000}\right)$.

Propriété

- 1 $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q}) : \log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r$.
- 2 $\log(x) > r \Leftrightarrow x > 10^r$
- 3 $\log(x) \leq r \Leftrightarrow 0 < x \leq 10^r$



Exemple

Le pH d'une solution aqueuse est $pH = -\log([H_3O^+])$. Ainsi : $[H_3O^+] = 10^{-pH}$.

Application (12)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : \log(x+11) + \log(x-4) = 2$.

Exercice 16

Soit f la fonction numérique définie sur $\left[0; +\infty\right[$ par $\begin{cases} f(x) = x^4(\ln x - 1); x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis déterminer la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.
- 2
 - a Montrer que f est continue à droite en 0.
 - b Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter le résultat géométriquement.
- 3
 - a Montrer que $f'(x) = 2x^3(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - b Dresser le tableau de variations de f .
- 4
 - a Sachant que $f''(x) = 2x^2(6\ln x - 5)\ln x$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$, étudier le signe de $f''(x)$ sur $]0; +\infty[$.
 - b Dédire que la courbe (C) admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses.
- 5
 - a Construire (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (on prend : $\sqrt{e} \approx 1,6$ et $e^2 \approx 7,2$).
 - b En utilisant la courbe (C) , déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^2(\ln x - 1) = -1$.
- 6 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(|x|)$.
 - a Montrer que la fonction g est paire.
 - b Construire (C_g) la courbe représentative de g dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Fonctions logarithmes

Exercice 17

Soit f la fonction numérique définie sur $[0; +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x^4(\ln x - 1)^2; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis déterminer la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.
- 2
 - a Montrer que f est continue à droite en 0.
 - b Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter le résultat géométriquement.
- 3
 - a Montrer que $f'(x) = 2x^3(\ln x - 1)(2 \ln x - 1)$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - b Dresser le tableau de variations de f .
- 4
 - a Sachant que $f''(x) = 2x^2(6 \ln x - 5) \ln x$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$, étudier le signe de $f''(x)$ sur $]0; +\infty[$.
 - b Dédire que la courbe (C) admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses.
- 5
 - a Construire (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (on prend : $\sqrt{e} \approx 1,6$ et $e^2 \approx 7,2$).
 - b En utilisant la courbe (C) , déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^2(\ln x - 1) = -1$.
- 6 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(|x|)$.
 - a Montrer que la fonction g est paire.
 - b Construire (C_g) la courbe représentative de g dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 18

Soit f la fonction numérique définie sur $[0; +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = 2x \ln x - 2x; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

- 1 Montrer que f est continue à droite au point 0.
- 2
 - a Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - b Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.
- 3
 - a Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.
 - b Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.
 - c Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
- 4
 - a Résoudre dans l'intervalle $]0; +\infty[$ les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = x$.
 - b Construire la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (on prend : $e^{\frac{3}{2}} \approx 4.5$).
- 5
 - a Déterminer le minimum de f sur $]0; +\infty[$.
 - b En déduire que pour tout x de $]0; +\infty[$, $\ln x \geq \frac{x-1}{x}$.

- 6 Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1; +\infty[$.
- a Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.
 - b Construire dans le même repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de la fonction g^{-1} .
- 7 On considère h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} h(x) = x^3 + 3x; x \leq 0 \\ h(x) = 2x \ln x - 2x; x > 0 \end{cases}$$
- a Etudier la continuité de h au point 0.
 - b Etudier la dérivabilité de la fonction h à gauche au point 0 puis interpréter graphiquement le résultat.
 - c La fonction h est-elle dérivable au point 0 ? justifier.

Exercice 19

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$.

- 1
- a Montrer pour tout x de $]0, +\infty[$, que $g'(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}$.
 - b Montrer que g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
 - c En déduire pour tout x de $[1, +\infty[$ que $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$. (Remarquer que $2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$)
 - d Montrer pour tout x de $[1, +\infty[$ que $0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$.
- Puis déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$.
- 2 Montrer que la fonction $G : x \mapsto x \left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x \right)$ est une fonction primitive de g sur $]0, +\infty[$.

Exercice 20

Première partie

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.
- 2
- a Vérifier que pour tout x de $]0; +\infty[$, $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right) \ln x$.
 - b En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
 - c Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$, $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$ puis en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$.
 - d Montrer que (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y = x$.
- 3
- a Vérifier que pour tout $]0; 1[$: $(x - 1) + \ln x \leq 0$ et que pour tout x de $[1; +\infty[$: $(x - 1) + \ln x \geq 0$.
 - b Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{x - 1 + \ln x}{x}.$$

- c Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- d M. Montrer que $f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

4 En déduire que (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

5 a

b Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$, $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$ et déduire la position relative de (C) et (Δ) .

c Construire (Δ) et (C) et dans le même repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

Deuxième partie

Soit (u_n) la suite numérique définie par: $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .

a i. Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

ii. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

iii. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

b Calculer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 21

1 Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + x - 2 + 2 \ln x$.

a Vérifier que : $g(1) = 0$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

b A partir du tableau de variations de la fonction de la fonction g ci-contre : Montrer que $g(x) \leq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; 1]$ et que $g(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1; +\infty[$.

2 On considère f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x$. Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

a Montrer que : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat.

b i. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

ii. Montrer que la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite (D) d'équation $y = x$.

c i. Montrer : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

ii. Montrer que f est décroissante sur l'intervalle $]0; 1]$ et croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

iii. Dresser la tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

d i. Résoudre dans l'intervalle $]0; +\infty[$ l'équation : $\left(1 - \frac{2}{x}\right) \ln x = 0$.

ii. En déduire que la courbe (C) coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées.

iii. Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1; 2]$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (D) sur l'intervalle $[1; 2]$.

e Construire, dans le même repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$, la droite (D) et la courbe (c) (on admettra que la courbe (C) possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 2.4 et 2.5).

- 3** On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = \sqrt{3}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .
- a** Montrer par récurrence que : $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n .
- b** Montrer que la suite (u_n) est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question II.4.c.).
- c** En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 22

Première partie

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par :
 $g(x) = x^3 - 1 - 2(\ln x)^2 + 2 \ln x$.

- 1** Vérifier que $g(1) = 0$.
- 2** Ci-contre le tableau de variations de g :
 Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Deuxième partie

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$ et soit (C_f) sa représentation graphique sur le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1** Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- 2** Montrer que la droite d'équation (D): $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
- 3** Étudier la position relative de (C_f) et (D).
- 4** Montrer que $(\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$, puis donner le tableau des variations de f sur $]0, +\infty[$.
- 5** Représenter (C_f) sur le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

Troisième partie

On considère la fonction h qui est définie sur $]0, +\infty[$ par :
 $h(x) = f(x) - x$.

- 1** Vérifier que $h(1) = 0$.
- 2** Ci-contre la courbe représentative de la fonction h .
 Déterminer le signe de h puis déduire que :
 $(\forall x \in [1, +\infty[), f(x) \leq x$.
- 3** Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :
 $u_0 = e$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n .
- a** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq e$.
- b** Montrer que (u_n) est décroissante. (utiliser la question 2 troisième partie)

- 4** En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

