

Chapter 3

Suites numériques

1 Rappels

Activité (1)

On considère la suite numérique (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{25}{10 - u_n}; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

- 1 Calculer u_1, u_2 .
- 2 Vérifier que $5 - u_{n+1} = \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et montrer par récurrence que $5 - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 3 On considère (v_n) la suite numérique définie par $v_n = \frac{5}{5 - u_n}$.
 - a Montrer que (v_n) est une suite arithmétique en déterminant sa raison.
 - b Déterminer v_n en fonction de n .
 - c Vérifier que $u_n = \frac{5v_n - 5}{v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 - d En déduire l'expression de u_n en fonction n .
 - e Calculer la somme S_n en fonction de n où : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

Activité (2)

On considère la suite numérique (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1 Calculer u_1, u_2 .
- 2 Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < u_n < 1$.
- 3 Montrer que (u_n) est croissante.
- 4 On considère (v_n) la suite numérique définie par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$.
 - a Montrer que (v_n) est une suite géométrique en déterminant sa raison.
 - b Déterminer v_n en fonction de n et en déduire l'expression de u_n en fonction n .

c Calculer la somme S_n en fonction de n où : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n+5}$.

	Suite géométrique	Suite arithmétique
Définition	$u_{n+1} = qu_n$	$u_{n+1} = u_n + r$
Terme général	$u_n = u_p \times q^{(n-p)}$ ($p \leq n$)	$u_n = u_p + (n-p)r$ ($p \leq n$)
Somme des termes consécutifs	$S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$ $= u_p \times \frac{(1 - q^{(n-p+1)})}{1 - q}$	$S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$ $= \left(\frac{n-p+1}{2}\right)(u_p + u_n)$
a, b et c trois termes consécutifs	$b^2 = ac$	$2b = a + c$

$(u_n)_{n \in I}$ majorée par M	$(\forall n \in I) u_n \leq M$
$(u_n)_{n \in I}$ minorée par m	$(\forall n \in I) u_n \geq m$
$(u_n)_{n \in I}$ bornée par M et m	$(\forall n \in I) m \leq u_n \leq M$
$(u_n)_{n \in I}$ est croissante	$(\forall n \in I) u_{n+1} \geq u_n$
$(u_n)_{n \in I}$ est décroissante	$(\forall n \in I) u_{n+1} \leq u_n$
$(u_n)_{n \in I}$ est constante	$(\forall n \in I) u_{n+1} = u_n$

2 Limite d'une suite

1 Définition

Définition

Soient (u_n) une suite numérique et l un nombre réel. On dit que l est la limite de (u_n) , et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ou plus simplement $\lim u_n = l$, si tout intervalle ouvert centré en l contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain indice.



Exemple

On considère la suite définie par $u_n = 2 + \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

u_1	u_5	u_8	u_{10}	u_{100}	u_{1000}
3	2.04	$\approx 2,016$	2,001	2,00001	2,0000001

On remarque que de plus en plus l'indice n prend des valeurs très grandes, les termes de la suite s'approchent de plus en plus à 2. On peut dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

2 Limite de suites de références

Propriété

Soit p un élément de $\mathbb{N}$ tel que $p \geq 3$, on a :

1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$

4 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

7 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

8 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$



Exemple

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}} = +\infty$.

- On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2n^4 + 3n^2 + 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 \left(-2 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4} \right)$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^4} = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4} = -2$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2n^4 + 3n^2 + 1 = -\infty$.

Application(1)

Calculer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1 $u_n = \frac{n^2 + n + 1}{3n^3 + n - 6}$

2 $u_n = \frac{(n+2)\sqrt{n}}{n+4}$

3 $u_n = \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} + 3}$

4 $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

5 $u_n = 2n - \sqrt{n}$

Définition

(Convergence d'une suite)

Soit (u_n) une suite numérique.

- 1 On dit que (u_n) est convergente si elle admet une limite finie (C-à-d s'il existe un réel l tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$).
- 2 On dit que (u_n) est divergente s'elle n'est pas convergente (C-à-d si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$ ou s'elle n'a pas de limite).



Exemple

- 1 La suite (u_n) telle que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = \frac{n}{\sqrt{n}+1}$ est divergente car $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- 2 La suite (v_n) telle que $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ est convergente car $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.
- 3 La suite (w_n) telle que $(\forall n \in \mathbb{N}) : w_n = (-1)^n$ est divergente car n'a pas de limite.

3 Limite de la suite géométrique (q^n) où $q \in \mathbb{R}^*$

Propriété

Soit a un réel, on a :

- 1 Si $a > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$.
- 2 Si $-1 < a < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$.
- 3 Si $a \leq -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite.
- 4 Si $a = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 1$.



Exemple

- 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (5)^n = +\infty$ parce que $5 > 1$.
- 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,5)^n = 0$ parce que $-1 < -0,5 < 1$.
- 3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n = 0$ parce que $-1 < \frac{7}{8} < 1$.
- 4 La suite $(-3)^n$ n'a pas de limite.

Application(2)

Calculer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants:

1 $u_n = \left(\frac{3}{8}\right)^n + \left(\frac{5}{4}\right)^n.$

2 $u_n = \frac{5^n}{(-4)^n}.$

3 $u_n = 2^n - 3^n.$

4 $u_n = \frac{4^n - 3^n}{4^n + 3^n}.$

Exercice 11

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = \frac{6u_n}{1 + 15u_n}.$

1 a Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}.$

b Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > \frac{1}{3}.$

2 On considère la suite numérique (v_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}.$

a Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}.$

b Exprimer v_n en fonction de $n.$

3 Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$ puis déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$

4 Limite de la suite (n^α) où $\alpha \in \mathbb{Q}^*$

Propriété

Soit $\alpha \in \mathbb{Q}^*$, on a:

1 Si $\alpha > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty.$

2 Si $\alpha < 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0.$



Exemple

1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{5}{3}} = +\infty$ parce que $\frac{5}{3} > 0.$

2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-\frac{4}{3}} = 0$ parce que $-\frac{4}{3} < 0.$

Application(3)

Calculer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

• $U_n = n^{\frac{5}{2}} - n^{\frac{4}{3}} \quad (U_n = \sqrt{n} - \sqrt[4]{n})$

5 Limite et ordre

Propriété

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Si $\begin{cases} u_n > v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l' \end{cases}$, alors $l \geq l'$.



Exemple

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies par $u_n = 2 + \frac{1}{n}$ et $v_n = 2 - \frac{1}{n}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n > v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$.

3 Critères de convergence

Propriété

- Toute suite croissante, majorée est convergente.
- Toute suite décroissante, minorée est convergente.

Application(4)

On considère la suite (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} \end{cases}$

- 1 Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $u_n < 1$.
- 2 Etudier la monotonie de la suite (u_n) puis en déduire qu'elle est convergente.

Propriété

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites numériques et l un nombre réel.

Si $\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l \end{cases}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Application(5)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{\cos(n)}{n^2 + 1} + 2$.

- 1 Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{-1}{n^2 + 1} + 2 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2 + 1} + 2$.
- 2 En déduire la limite de (u_n) .

Propriété

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

- 1 Si $\begin{cases} \alpha u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \end{cases}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- 2 Si $\begin{cases} v_n \leq \alpha u_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \end{cases}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

Application(6)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies par $u_n = \sin(n) + 3n$ et

$$v_n = \cos(n^2 + 3) - 5n + 1$$

- 1 Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $u_n \geq -1 + 3n$ et que $v_n \leq 2 - 5n$.
- 2 En déduire la limite de (u_n) et (v_n) .

Propriété

Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites numériques et l un nombre réel et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\text{Si } \begin{cases} |u_n - l| \leq \alpha v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \end{cases}, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l.$$

Application(7)

On considère la suite (u_n) définie par: $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + 1$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Exercice 12

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1}$.

- 1 Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n < 1$.
- 2
 - a Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $u_{n+1} - u_n = -\frac{u_n(u_n - 1)}{u_n + 1}$.
 - b Etudier la monotonie de (u_n) .
 - c En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $u_n \geq \frac{1}{3}$ et que la suite (u_n) est convergente.
- 3
 - a Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(1 - u_n)$.
 - b En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{2}{3}$.
 - c Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- 4) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$
 - a Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b Exprimer v_n et u_n en fonction de n .

c Déterminer au nouveau $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4 Limite de suites particulières

1 La suite $v_n = f(u_n)$

Propriété

Soit f une fonction numérique continue en l et (u_n) une suite convergente et sa limite est l .

La suite (v_n) tel que $v_n = f(u_n)$ est une suite convergente et sa limite est $f(l)$.



Exemple

Déterminons la limite de la suite (v_n) définie par: $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \cos\left(\frac{\pi n + 2}{3n - 1}\right)$.

Application(8)

Calculer les limites des suites (u_n) et (v_n) suivantes $u_n = \sin\left(\frac{1 - n^2\pi}{n + 6n^2}\right)$ et $v_n = \sqrt{\frac{16n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 1}}$

2 La suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Propriété

Soit f une fonction numérique et I un intervalle de D_f et soit $(u_n)_n$ une suite telle que : $u_0 \in I$

$u_{n+1} = f(u_n); n \in \mathbb{N}$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1 f est continue sur I .
- 2 $f(I) \subset I$.
- 3 la suite $(u_n)_n$ converge vers l .

Alors $f(l) = l$.

Application(9)

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$.

- 1 Montrer que f est décroissante sur $[0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.
- 2 Montrer, pour tout $x \in [1; +\infty[$, que : $f(x) \leq x$.
- 3 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq 2$.
 - b Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
 - c En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.