

Chapter 2

Dérivation- Etude de fonctions

1 Nombre dérivé-Fonction dérivée (Rappels)

Activité (1)

- 1 On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x$.
Étudier la dérivabilité de f en -1 puis interpréter le résultat graphiquement.
- 2 On considère g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x - 1|$.
 - a Étudier la dérivabilité de g à droite et à gauche en 1 puis interpréter les résultats graphiquement.
 - b g est-elle dérivable en 1 ?

Définitions et propriétés

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un point de I .

- 1 On dit que f est dérivable en a s'il existe un réel l tel que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$.
 - a Le nombre l , noté $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$, est appelé le nombre dérivé de la fonction f en a .
 - b Dans ce cas la courbe de f admet une tangente au voisinage de a d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
 - c La fonction $x \mapsto f'(a)(x - a) + f(a)$ s'appelle l'approximation affine de f au voisinage de a . On écrit alors $f(x) \cong f'(a)(x - a) + f(a)$ au voisinage de a .
- 2 On dit que f est dérivable à droite de a , s'il existe un réel l' , tel que $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l'$.
 - a Le nombre l' , noté $f'_d(a)$, est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en a .
 - b Dans ce cas la courbe de f admet une demi-tangente au voisinage de a d'équation
$$\begin{cases} y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \\ x > a \end{cases} \quad \text{(On définit de même manière la dérivabilité à gauche en } a \text{)}$$



Exemple

La fonction définie sur $] -\infty; 1]$ par $f : x \mapsto x + 1 + 2\sqrt{1 - x}$ est dérivable en -3. En effet : On a

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 1 + 2\sqrt{1-x}}{x + 3}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 1 + 2\sqrt{1-x})(x - 1 - 2\sqrt{1-x})}{(x + 3)(x - 1 - 2\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 1)^2 + 2(1 - x)}{(x + 3)(x - 1 - 2\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)(x - 1)}{(x + 3)(x - 1 - 2\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 1}{x - 1 - 2\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc f est dérivable en -3 et la courbe (C_f) admet au voisinage de -3 une tangente d'équation : $y = f'(-3)(x + 3) + f(-3) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Donnons une valeur approchée de $f(-2.999)$:

La fonction affine tangente à (C_f) au voisinage de -3 est $g : x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Ainsi : $f(-2.999) \cong g(-2.999)$.

Or $g(-2.999) = \frac{1}{2}(-2.999) + \frac{7}{2} = 2,0005$.

Par suite $f(-2.999) \cong 2,0005$.



Remarque

- 1 Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$, alors (C_f) admet une tangente horizontale au point $A(a, f(a))$.
- 2 Si f est continue en a et $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, alors (C_f) admet une demi-tangente verticale au point $A(a, f(a))$.



Exemple

La fonction définie sur $] -\infty; 1]$ par $f : x \mapsto x + 1 + 2\sqrt{1-x}$ n'est pas dérivable en 1 à gauche. En effet : On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1 + 2\sqrt{1-x}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1 + 2\sqrt{1-x})(x - 1 - 2\sqrt{1-x})}{(x - 1)(x - 1 - 2\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x + 3)(x - 1)}{(x - 1)(x - 1 - 2\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x + 3}{x - 1 - 2\sqrt{1-x}} = +\infty \end{aligned}$$

Parce que $\lim_{x \rightarrow 1^-} x + 3 = 4$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} x - 1 - 2\sqrt{1-x} = 0^-$ du fait que $x - 1 < 0$ et $-2\sqrt{1-x} < 0$ pour tout $x < 1$.

Donc f n'est pas dérivable en 1 à gauche. Puisque f est continue en 1 à gauche et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$, alors (C_f) admet une demitangente verticale au point $A(1, 2)$ dirigée vers le haut.

Application(1)

Etudier la dérivabilité de la fonction f en a puis interpréter graphiquement les résultats dans les cas suivants:

- 1 $f(x) = x^3 - x$ et $a = 2$
- 2 $f(x) = \frac{x+1}{x}$ et $a = 1$
- 3 $f(x) = \sqrt{2x+1}$ et $a = -\frac{1}{2}$ à droite.

Exercice 7

On considère f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$.

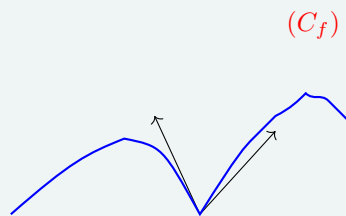
- 1 Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$.
- 2 Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$. Interpréter graphiquement le résultat.

Propriété

f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Graphiquement

Si $f'_g(a) \neq f'_d(a)$, alors (C_f) admet deux demi-tangentes non parallèles au point $A(a, f(a))$. Ce point est appelé point anguleux.



Application(2)

On considère f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} - 1; 0 \leq x < 1 \\ f(x) = \frac{x^2 - 1}{4} \end{cases} ; x \geq 1$

- 1 Montrer que f est continue en 1.
- 2 Étudier la dérivabilité de f en 1.



Remarque

Si f est dérivable en a , alors elle est continue en a . la réciproque n'est pas toujours vraie.



Exemple

La fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en ce point.

2

Opérations sur les fonctions dérivables-Monotonie d'une fonction

Propriété

- 1 Les fonctions polynomiales et les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
- 2 Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition.

Tableau des fonctions dérivées usuelles

La fonction f	La fonction dérivée f'	Domaine de dérivabilité de f
$x \mapsto a (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax + b (a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

Propriété

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel, on a:

- 1 La fonction $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$.
- 2 La fonction λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
- 3 La fonction $f \times g$ est dérivable sur I et $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.
- 4 La fonction $f^n (n \in \mathbb{N})$ est dérivable sur I et $(f^n)' = n f' \times f^{n-1}$.
- 5 Si $(\forall x \in I) : g(x) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$.
- 6 Si $(\forall x \in I) : f(x) \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.
- 7 Si $(\forall x \in I) : f(x) > 0$, alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$.

Application(3)

- 1 Calculer la dérivée des fonctions suivantes: $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$; $h(x) = \sqrt{x} \sin(x) + \cos(x)$; $g(x) = (x^2 + 1)^5$
- 2
 - a Etudier la monotonie de la fonction f ci-dessus.
 - b Dresser le tableau de variations de f .
 - c En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}) : -1 \leq f(x) \leq 1$.

Exercice 8

- 1 On considère g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x\sqrt{x} - 1$.
 - a Etudier la dérivabilité de g à droite en 0 . Interpréter graphiquement le résultat.
 - b Montrer que g est dérivable sur $]0; +\infty[$ puis calculer sa dérivée.
 - c Dresser le tableau de variations de g .
 - d Calculer $g(1)$ puis déduire le signe de g sur $[0; +\infty[$.
- 2 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x - 3 + \frac{4}{\sqrt{x}}$.
 - a Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[) : f'(x) = \frac{2g(x)}{x\sqrt{x}}$.
 - b Etudier les variations de f .
 - c Dresser le tableau de variations de f .
 - d En déduire que $(\forall x \in]0; +\infty[) : f(x) \geq 3$.

3 Dérivée de la fonction composée

Activité (1)

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \cos(x)$; $g(x) = x^2 - 2x$

- 1 Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- 2 Calculer $f'(x) \times g'(f(x))$.
- 3 Soit $h(x) = (g \circ f)(x)$. Déterminer $h(x)$ puis calculer $h'(x)$.
- 4 Comparer $h'(x)$ et $f'(x) \times g'(f(x))$.

Propriété

- 1 Si f est dérivable en un réel a et g dérivable en $f(a)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en a et : $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$.
- 2 Si f est dérivable sur un intervalle I et g dérivable sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable sur I et de plus, pour tout $x \in I$:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$



Exemple

Déterminons la dérivée de la fonction $h : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ sur $]0; +\infty[$.

Pour tout x de $]0; +\infty[$, on a $h(x) = (g \circ f)(x)$ tel que $g(x) = \cos(x)$ et $f(x) = \sqrt{x}$.

Comme g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $f(]0; +\infty[) \subset \mathbb{R}$, alors la fonction h est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Et on : $h'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) = \frac{-\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$, pour tout x de $]0; +\infty[$.

Application(4)

Calculer la dérivée des fonctions $f : x \mapsto \sin\left(x^2 - \frac{2}{3}x + 4\right)$ et $g : x \mapsto \cos\left(\frac{4}{x^2 + 4}\right)$

4 Dérivée de la fonction Réciproque

Propriété

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $a \in I$. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

Application(5)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f(1)$.
3. Montrer que f^{-1} est dérivable en 2 puis déterminer $(f^{-1})'(2)$.

Propriété

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est dérivable sur I tel que $(\forall x \in I) : f'(x) \neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$. De plus on a pour tout $x \in J : (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Conséquences

- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[: (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

- Si f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in I) : f(x) > 0$, alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est donnée par :

$$\sqrt[n]{f(x)}' = \frac{f'(x)}{n \times (\sqrt[n]{f(x)})^{n-1}}$$

Application(6)

- 1 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a $f(x) = \sqrt[3]{x}$

b $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

c $f(x) = \sqrt[4]{1 + \cos^2(x)}$

d $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$

- 2 A l'aide du nombre dérivé, calculer les limites suivantes:

a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$

b $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^8 + 1)(\sqrt[4]{x^3} + 1) - 4}{x - 1}$

Exercice 9

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 3$.

- 1 Etudier les variations de la fonction f .

- 2 Soit g la restriction de f sur $[1; +\infty[$.

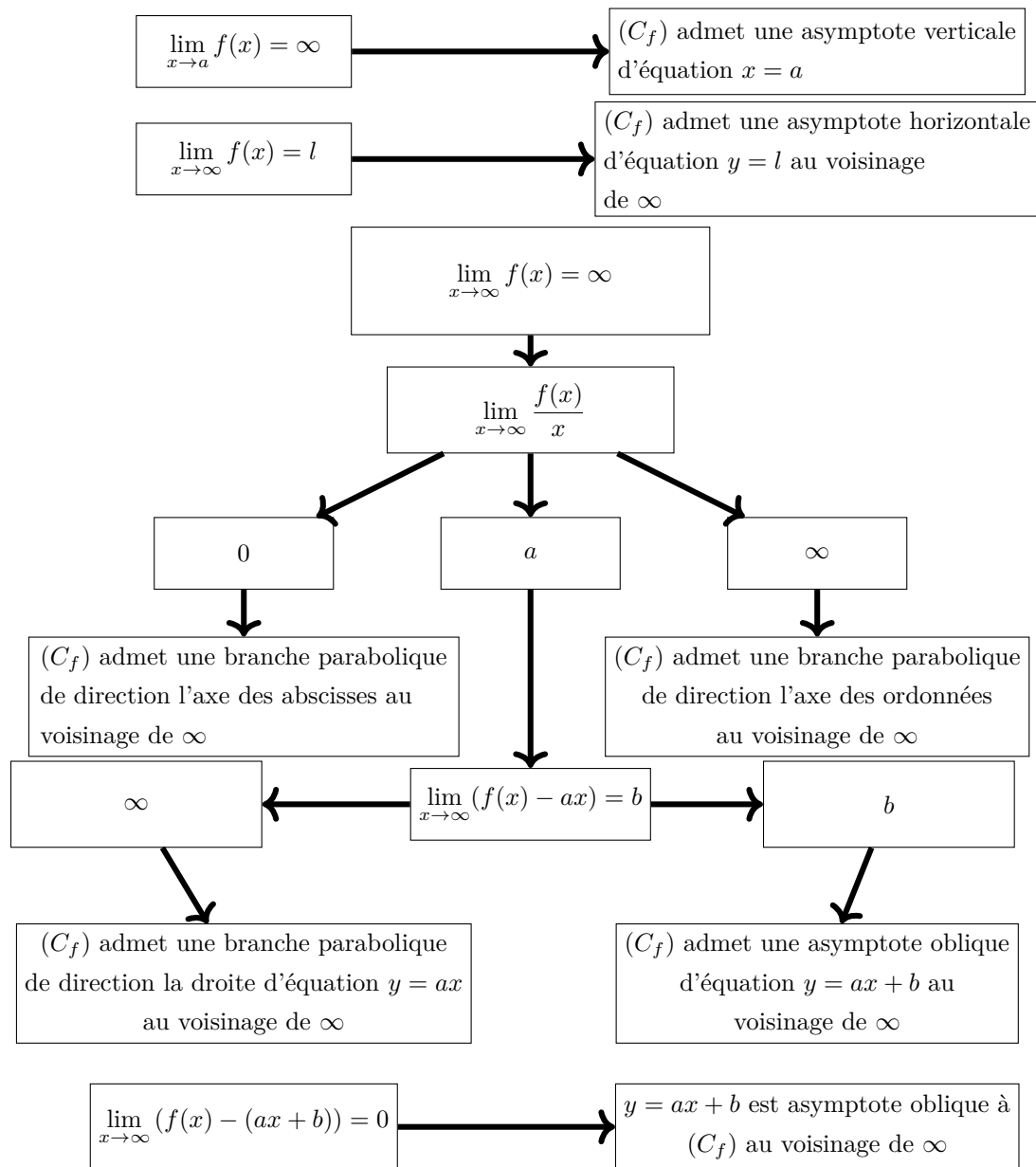
a Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.

b Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $2 < \alpha < 3$.

c Montrer que : $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2 - 1)}$.

5

Branches infinies (Rappel)



Exemple

On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = \frac{3 - 2x^2}{(1 + x)^2}$.

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 2x^2}{(1 + x)^2} = -2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 2x^2}{(1 + x)^2} = -2$.

Donc la droite d'équation $y = -2$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Et on a : $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3 - 2x^2}{(1 + x)^2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3 - 2x^2}{(1 + x)^2} = +\infty$.

Donc la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale de la courbe (C_f) .



Exemple

On considère g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = 2x - \sqrt{x}$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1) = +\infty$.

On calcul alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$: On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$.

Par suite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{x} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$.

D'où la courbe (C_g) admet une branche parabolique de direction de la droite d'équation $y = 2x$ au voisinage de $+\infty$.

Application(7)

On considère f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$.

- 1 Donner $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f .
- 2 Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$. Interpréter les résultats.
- 3
 - a Vérifier, pour tout x de $\mathcal{D}_f$, que $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x + 2}$.
 - b Montrer que la droite d'équation (D): $y = x - 1$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
 - c Etudier les positions relatives entre la courbe (C_f) et la droite (D) .

6 Concavité d'une courbe - Points d'inflexion

Propriété

Soient f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative et $a \in I$.

- 1 Si f'' est positive sur l'intervalle I , alors (C_f) est convexe
- 2 Si f'' est négative sur l'intervalle I , alors (C_f) est concave.
- 3 Si f'' s'annule en a en changeant de signe, alors le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de (C_f) .

Application(8)

On considère f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$. Etudier la concavité de (C_f) en précisant les points d'inflexion s'ils existent.

7 Éléments de symétrie d'une courbe

1 Axe de symétrie

Propriété

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé. La droite (Δ) d'équation $x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) est un axe de symétrie de la courbe (C_f) si et seulement si :

$$\begin{cases} (\forall x \in D); (2a - x) \in D \\ (\forall x \in D); f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

Application(9)

Montrer que la droite $(\Delta) : x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$.

2 Centre de symétrie

Propriété

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Le point $\Omega(a; b)$ tel que $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f) si et seulement si :

$$\begin{cases} (\forall x \in D); & (2a - x) \in D \\ (\forall x \in D); & f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}.$$

Application(10)

On considère f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$.

- 1 Montrer que le point $\Omega(-2; -3)$ est un centre de symétrie de la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$.
- 2 En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $] -2; +\infty[$.

Exercice 10

On considère f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$.

- 1 Donner les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère.
- 2 Etudier les variations de f .
- 3 Soit g la restriction de f sur $[-1; +\infty[$.
Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- 4 Construire $(D) : y = x - 1$, (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice de synthèse

- 1 On considère g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
- a Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - b
 - i. Montrer, pour tout réel x , que $g'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.
 - ii. Donner le tableau des variations de g .
 - iii. En déduire, pour tout réel x , que $g(x) > 0$.
- 2 Soit f la fonction qui définit sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 + 1}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- a Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - b Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Interpréter géométriquement le résultat.
 - c Montrer que la droite $(D) : y = 2x - 1$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
 - d
 - i. Montrer, pour tout réel x , que $f'(x) = g(x)$.
 - ii. Dresser le tableau des variations de f .
 - e Calculer $f(1)$ puis tracer (C_f) .
 - f
 - i. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
 - ii. Montrer que f^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$ puis calculer $(f^{-1})'(\sqrt{2})$.
 - iii. Tracer $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère.