

Chapter 1

Continuité

1 Continuité d'une fonction numérique

Activité: Soutient des prérequis

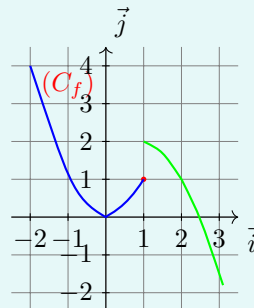
Calculer les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x + 3}{x - 1}$	b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x x - 4x + 3}{x^5 - 7x + 2}$	c. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$
d. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 3x - 9}{x^2 + x - 6}$	e. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x + 7} - 3}{x - 1}$	f. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - 3\sqrt{x + 3}}{x + 2}$
g. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 5x + 6}{2 - x}$	h. $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x^2 + x - 2}{-x^2 - x + 6}$	i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x - 1}$

2 Continuité d'une fonction en un point

Activité (1)

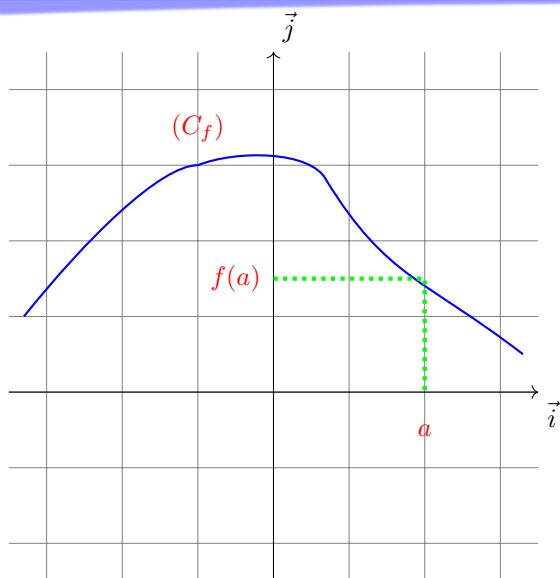
On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f .



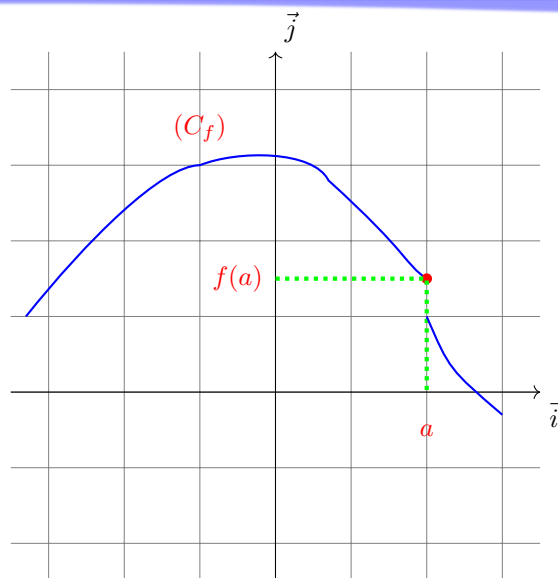
- 1 Déterminer graphiquement $f(-1)$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. Que peut-on déduire ?
- 2 Déterminer graphiquement $f(1)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. Que peut dire sur (C_f) au point $x_0 = 1$?

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un point de I . On dit que f est continue en a si seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.



• f est continue en a



• f est discontinue en a



Exemple

- ① La fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}; x \neq 3 \\ f(3) = 6 \end{cases}$ est continue en 3.

En effet: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} x + 3 = 6 = f(3)$$

- ② La fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(3x)}{x}; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ est discontinue en 0.

En effet : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 3 \times \frac{\sin(3x)}{3x}$$

$$= 3 \neq f(0).$$

Application

Etudier la continuité des fonctions suivantes au point a .

- 1 $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x - 1}; x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$ et $a = 1$.
- 2 $\begin{cases} g(x) = \frac{x\sqrt{x+2} - 4}{x - 2}; x \in [-2; 2[\cup]2; +\infty[\\ g(2) = \frac{5}{2} \end{cases}$ et $a = 2$.

Exercice 1

Etudier la continuité des fonctions suivantes au point a .

- 1 $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}; x \neq -1 \\ f(-1) = 1 \end{cases}$ et $a = -1$.
- 2 $\begin{cases} g(x) = \frac{\sin(x-2)}{x^2 - 2x}; x > 2 \\ g(2) = \frac{1}{2} \end{cases}$ et $a = 2$.

3 Continuité à droite - continuité à gauche

Définition

- 1 Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a - r; a]$ avec $r > 0$. On dit que f est continue à droite de a si seulement si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.
- 2 Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; a + r[$ avec $r > 0$. On dit que f est continue à gauche de a si seulement si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.



Exemple

La fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}; x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$ est continue à droite en 1 est non continue en 1 à gauche. En

effet : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad (\text{Du fait que } |x - 1| = x - 1 \text{ si } x > 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 2 = f(1)$$

Ainsi f est continue à droite en 1.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} \\ \text{Et:} \quad &= \lim_{x \rightarrow 1^+} -\frac{x^2 - 1}{(x - 1)} \quad \left(\text{Du fait que } |x - 1| = -(x - 1) \text{ si } x < 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} -(x + 1) = -2 \neq f(1).\end{aligned}$$

Ainsi f est discontinue à gauche en 1.

Propriété

f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite de a .

Autrement : f est continue en $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Application

On considère f la fonction définie par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} & ; x > 0 \\ f(x) = \frac{\sin(2x)}{x} & ; x < 0. \\ f(0) = 2^2 \end{cases}$$

- 1 Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 0.
- 2 f est-elle continue en 0.

Exercice 2

1 Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}; x > 2 \\ f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-3}; x \leq 2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 0.

2 Soit g la fonction définie par
$$\begin{cases} g(x) = x^3 + ax & ; x > -1 \\ g(x) = -x + 1 & ; x \leq -1 \end{cases}.$$

Déterminer la valeur de a pour que g soit continue en -1.

4

Continuité d'une fonction sur un intervalle

Définition

- 1 On dit que f est continue sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ si f est continue en tout point de $]a; b[$.
- 2 On dit que f est continue sur l'intervalle $[a; b]$ si f est continue en tout point de $]a; b[$ et continue à droite de a et à gauche de b .



Remarque

On définit de même manière la continuité sur les intervalles $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, +\infty[$ et $] -\infty, b]$.



Exemple : Fonction partie entière

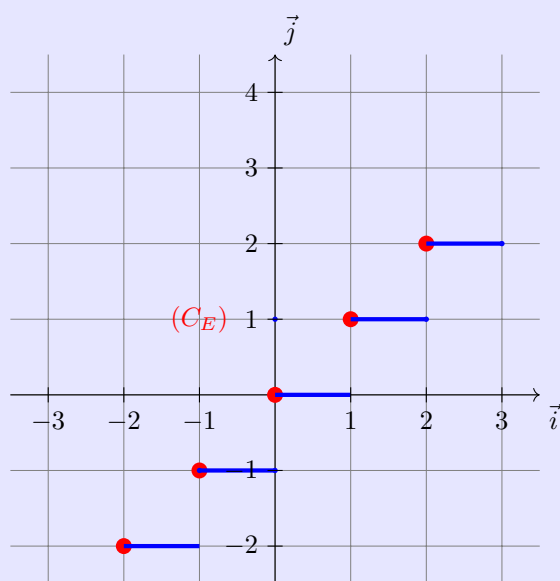
• La fonction partie entière est la fonction qui, à tout réel x , associe l'unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$. On note la partie entière de x par $E(x)$ ou $[x]$.



Exemple

$E(3,2) = 3$ parce que $3 \leq 3,2 < 4$ et $E(-1,2) = -2$ parce que $-2 \leq -1,2 < -1$. La courbe de la fonction $x \mapsto E(x)$ sur l'intervalle $[-1; 3[$ est :

- 1 La fonction $x \mapsto E(x)$ est continue sur l'intervalle $[-1; 0[$ du fait qu'elle est continue en tout point de $] -1; 0[$ et à droite en -1 car $\lim_{x \rightarrow -1^+} E(x) = -1 = E(-1)$.
- 2 La fonction $x \mapsto E(x)$ n'est pas continue sur l'intervalle $] 1; 3[$ du fait qu'elle n'est pas continue en 1 car $\lim_{x \rightarrow 1^+} E(x) = 1 = E(1)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} E(x) = 0 \neq E(1)$.



Propriété

- 1 Toute fonction polynômiale est continue sur $\mathbb{R}$.
- 2 Toute fonction rationnelle est continue sur un intervalle inclus dans son domaine de définition.
- 3 Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- 4 La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est continue sur $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- 5 La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue $\mathbb{R}^+$.
- 6 La fonction $x \mapsto |x|$ est continue $\mathbb{R}$.



Exemple

- 1 La fonction $f : x \mapsto x^3 + 2x^2 - x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ parce qu'elle est une fonction polynômiale.
- 2 La fonction $g : x \mapsto \frac{5x^3 + 2x - 1}{x^2 - 1}$ est continue sur $]1; +\infty[$ parce qu'elle est une fonction rationnelle et $]1; +\infty[\subset \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Application

On considère f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = -x + 4; & x < 3 \\ f(x) = \frac{6-x}{x} & ; x \geq 3 \end{cases}$. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

5 Image d'un intervalle par une fonction continue

6 Image d'un segment-Image d'un intervalle

Propriété

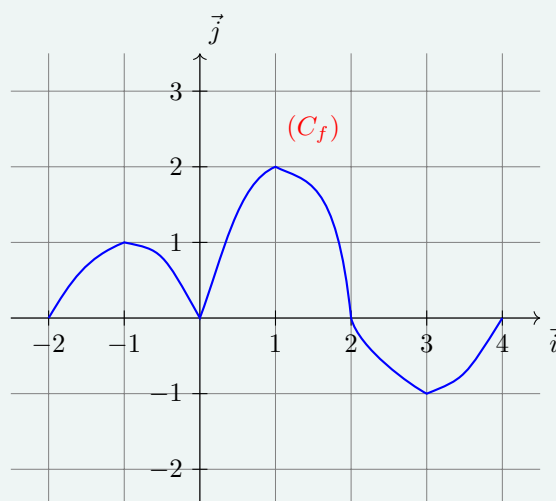
- 1 L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
- 2 L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Remarque

Si f est continue sur un segment $[a, b]$ et M et m sont respectivement le maximum et le minimum de f sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [m, M]$.

Application

On donne ci-contre la courbe d'une fonction f définie sur $[-2; 4]$. Déterminer l'image des intervalles suivants $[-2, 3]$, $[0, 1]$, $[1, 3]$ et $] -1, 1]$ par f .



7 Image d'un intervalle par une fonction continue strictement monotone

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .
Dans ce tableau suivant a et b sont deux nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Image de l'intervalle I par la fonction f		
L'intervalle I	f strictement croissante sur I	f strictement décroissante sur I
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)]$
$]a, b]$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$]a, b[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$



Exemple

On considère f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4x - 1$. La fonction f est strictement décroissante sur $] - \infty; 2]$ et strictement croissante sur $[2; +\infty[$. On a :

- ① $f([2; 4]) = [f(2); f(4)] = [-5; -1]$
- ② $-f([2; +\infty[) = [f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [-5; +\infty[$
- ③ $f([-1; 1]) = [f(1); f(-1)] = [-4; 4]$
- ④ $f(] - \infty; 2]) = [f(2), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[= [-5; +\infty[$

Application

Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{3x+2}{x-4}$.

- ① Déterminer D_f .
- ② Etudier la monotone de f .
- ③ Déterminer $f([0, 1])$; $f([4, +\infty[$ et $f(] - \infty, 4[)$.

Exercice 3

On considère f une fonction définie par $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.

- ① Dresser le tableau de variation de la fonction
- ② Déterminer les images des intervalles suivants $] - 1; 0]$; $[1; 2]$; $[-1; 2[$; $[1; +\infty[$ par f .

8 Opérations sur les fonctions continuités

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

- ① Les fonctions $f + g$; $f \times g$; λf et $|f|$ sont continues sur I .
- ② Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f^n est continue sur I .
- ③ Si $(\forall x \in I) : g(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I .
- ④ Si $(\forall x \in I) : f(x) \geq 0$, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I .



Exemple

- 1 La fonction $f : x \mapsto 2x^2 - x + \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions continues sur $[0, +\infty[$ qui sont $x \mapsto 2x^2 - x$ et $x \mapsto \sin(x)$.
- 2 On considère $g : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$. On a :
 - a La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est continue sur $] -\infty; 1[$ puisqu'elle est une fonction polynomiale et on a $(\forall x \in] -\infty; 1[) : x^2 + 1 > 0$. Ainsi $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est continue sur $] -\infty; 1[$.
 - b La fonction $x \mapsto x + 1$ est continue sur $] -\infty; 1[$ et on a $(\forall x \in] -\infty; 1[: x + 1 \neq 0$.
 Il en résulte que la fonction g est continue sur $] -\infty; 1[$.

Application

Montrer que f est continue sur I dans les cas suivants :

- 1 $f(x) = x^2 + 1 + \sin(x)$ et $I = \mathbb{R}$.
- 2 $f(x) = \cos(x) \times \sqrt{4x^2 + 5}$ et $I = \mathbb{R}$.
- 3 $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$ et $I =]2; +\infty[$.

Propriété

Soient f et g deux fonctions. Si f est continue sur un intervalle I et g continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$ alors la fonction $g \circ f$ est continue sur l'intervalle I .



Exemple

On considère la fonction $h : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$. On a $h = g \circ f$ avec $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto \frac{x}{x + 1}$. Puisque f est continue sur $[0; +\infty[$ et g est continue sur $] -1; +\infty[$ et $f([0; +\infty[) \subset [0; +\infty[$, alors h est continue sur $[0; +\infty[$.

Application

On considère la fonction $h : x \mapsto \sin(x^2 - 4x + 1)$. Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.

9

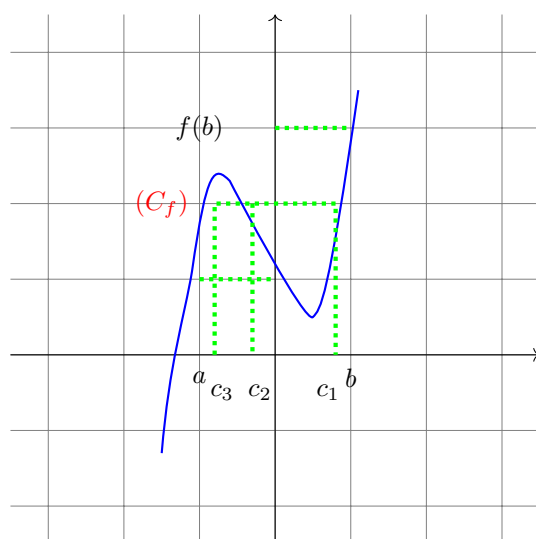
Théorème des valeurs intermédiaires



Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un réel c de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = k$.

En d'autres termes: l'équation $f(x) = k$ d'inconnue x admet au moins une solution dans $[a, b]$ pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$.



Exemple

Montrons que l'équation $(E) : x^2 - \sqrt{x+2} = 2$ admet au moins une solution sur $[-2; 0]$.

On considère f la fonction définie par $f(x) = x^2 - \sqrt{x+2}$.

L'équation (E) est équivalente à l'équation $f(x) = 2$.

La fonction f est continue sur $[-2; 0]$ comme somme de deux fonctions continues et on a $f(-2) = 4$ et $f(0) = -\sqrt{2}$.

Puisque $f(0) \leq 2 \leq f(-2)$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation (E) admet au moins une solution sur $[-2; 0]$.



Corollaire

Si la fonction f est continue sur $[a, b]$ tel que $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$. Si de plus f est strictement monotone, alors cette solution est unique.



Exemple

Montrons que l'équation $(E) : x^3 + x^2 + 1 = 0$ admet une unique solution α telle que $-1 < \alpha < 0$. On considère f la fonction définie par $f(x) = x^3 + x^2 + 1$. L'équation (E) est équivalente à l'équation $f(x) = 0$. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[-1; 0]$ et on a $f(-1) \times f(0) < 0$. Donc d'après T.V.I l'équation (E) admet une solution unique α tel que $-1 < \alpha < 0$.

Donnons un encadrement de α d'amplitude 0,25.

On a $-1 < \alpha < 0$, alors $\alpha = -\frac{1}{2}$ ou $\alpha \in]-1, -\frac{1}{2}[$ ou $\alpha \in]-\frac{1}{2}, 0[$. Or $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$, alors $\alpha \neq -\frac{1}{2}$. Et puisque $f(-1) \times f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$, alors $\alpha \in]-1, -\frac{1}{2}[$ et l'amplitude de cet encadrement est $-\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2} > 0,25$. On répète donc le procédé précédent. On a $\alpha \in]-1, -\frac{1}{2}[$, alors $\alpha = -\frac{3}{4}$ ($-\frac{3}{4}$ est le centre de $\alpha \in]-1, -\frac{1}{2}[$) ou $\alpha \in]-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}[$ ou $\alpha \in]-1, -\frac{3}{4}[$. Puisque $f\left(-\frac{3}{4}\right) \neq 0$ et $f\left(-\frac{3}{4}\right) \times f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$, alors $\alpha \in]-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}[$ et l'amplitude de cet encadrement est $-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 0,25$. Ce procédé est appelé **la dichotomie**.

Application

- 1 Montrer que l'équation $x^5 - x^3 + 5x - 4 = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[0, 1]$.
- 2 Montrer que l'équation $\sin(x) + \frac{1}{2} = -x$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}; 0\right]$.



Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

- 1 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$ puis vérifier que $1 < \alpha < 2$.
- 2 Donner un encadrement de α d'amplitude 0,25.
- 3 Donner le signe de f sur $[1; +\infty[$.

10

Fonction Réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

Activité

Soit la fonction définie sur $I = [1; 4]$ par: $f(x) = x^2 - 2x$

- 1 Montrer que f est continue et strictement croissante sur I .
- 2 Déterminer l'intervalle J l'image de I par f .
- 3 Soit $x \in J$ et $y \in I$, montrer que $f(y) = x \Leftrightarrow y = 1 + \sqrt{x+1}$.
- 4 On considère g la fonction définie sur J par $g(x) = 1 + \sqrt{1+x}$.

a Remplir le tableau suivant :

• $g(-1) =$	• $f(1) =$
• $g(0) =$	• $f(2) =$
• $g(8) =$	• $f(4) =$

b Que remarquez-vous?

c Montrer que $(\forall x \in I)(g \circ f)(x) = x$ et $(\forall x \in J)(f \circ g)(x) = x$.

La fonction g est appelée la fonction réciproque de f et on la note par f^{-1} .

Propriété

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors f admet une fonction réciproque, notée f^{-1} , définie de $J = f(I)$ vers I telle que :
$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

Conséquences

- 1 $(\forall x \in I) : (f^{-1} \circ f)(x) = x.$
- 2 $(\forall x \in J) : (f \circ f^{-1})(x) = x.$



Exemple

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} + 2$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc f admet une fonction réciproque f^{-1} continue et strictement croissante sur $f([0, +\infty[) = [2, +\infty[$. Déterminons l'expression de f^{-1} : Soient $y \in [2, +\infty[$ et $x \in [0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{y} + 2 = x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{y} = x - 2 \\ &\Leftrightarrow y = (x - 2)^2. \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow y = (x - 2)^2$. Il en résulte: $(\forall x \in [2, +\infty[) f^{-1}(x) = (x - 2)^2$.

Application

On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x - 4}$.

- 1 Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- 2 Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

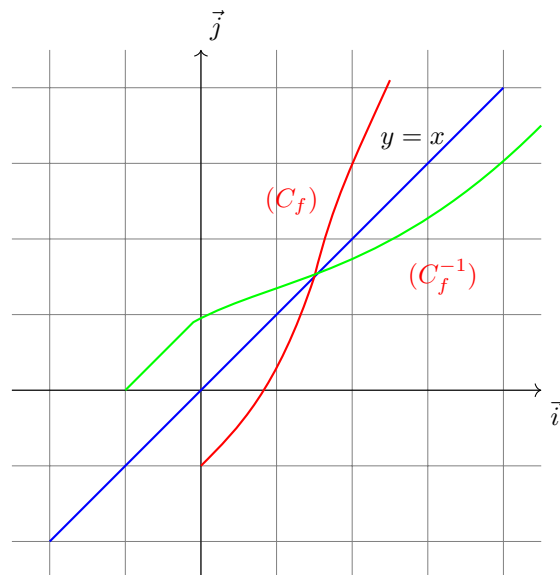
Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $] -\infty, -1[$ par $g(x) = \frac{2x + 3}{x + 1}$.

- 1 Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- 2 Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

Propriété

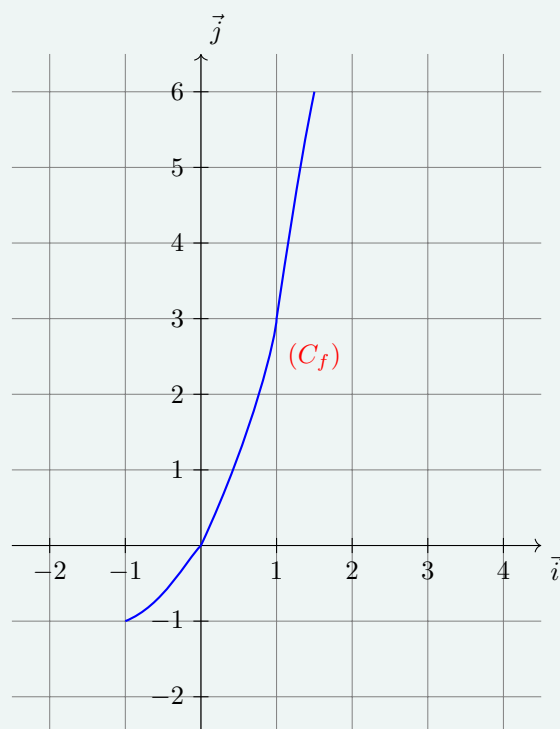
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors : - La fonction réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et a même sens de variations que la fonction f . - Les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Application

On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-1; +\infty[$.

- 1 Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
- 2 Dresser le tableau de variations de f^{-1} .
- 3 Construire la courbe représentative de f^{-1} .



11 Fonction Racine $n^{\text{ième}}$

Soit n un entier naturel tel que : $n \geq 1$ et Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^n$.

- 1 f est une fonction polynôme donc f est continue sur $\mathbb{R}$ par suite sur $\mathbb{R}^+$.

2 f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, du fait que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : f'(x) = nx^{n-1} \geq 0$.

Alors f admet une fonction réciproque f^{-1} , appelée **fonction racine n -ième**, définie sur $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$. l'image du nombre x de $\mathbb{R}^+$ par f^{-1} est noté $\sqrt[n]{x}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall y \in \mathbb{R}^+) : x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$



Remarque

pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a :

- 1 $\sqrt[1]{x} = x$.
- 2 $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$
- 3 $\sqrt[3]{x}$ est appelée la racine cubique de x .

Conséquences

- 1 $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall y \in \mathbb{R}^+) x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$.
- 2 $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x$.
- 3 $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$.
- 4 $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$.
- 5 La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
- 6 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$



Exemple

- 1 $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$
- 2 $\sqrt[5]{5} > \sqrt[5]{3}$ parce que $5 > 3$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x} = +\infty$
- 3 $(\forall x \in \mathbb{R}^+) x^5 = 32 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{32} = 2$.

Application

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

1. $x^7 = 5$	2. $x^6 = -2$	3. $x^4 = 81$
4. $x^5 = -32$	5. $\sqrt[3]{3x-1} = 2$	6. $\sqrt[5]{2x-3} < 2$

Propriété

Soient a et b deux réels positifs, et n et p sont deux entiers naturels non nuls.

① $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

② Si $b \neq 0$, alors $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

③ $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a}$

④ $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$

⑤ $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$



Exemple

Simplifions le nombre : $A = \frac{\sqrt[4]{32} \times \sqrt[6]{27} \times \sqrt[4]{108}}{\sqrt{\sqrt[4]{144}}}$.

Application

① Simplifier $A = \frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{64}}$; $B = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{729}}}$ et $C = \frac{\sqrt[15]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times (\sqrt[5]{9})^3}{\sqrt[5]{3}}$.

② Mettre en ordre croissant les nombres $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt{5}$

Exercice 5

Simplifier les nombres suivants : $A = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{256}} \times \sqrt[4]{64}}{\sqrt[5]{24300000} \times \sqrt[3]{1024}}$ et $B = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9}} \times \sqrt[4]{9}}{\sqrt[5]{729} \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$

Propriété

Soit f une fonction positive sur l'intervalle I et $x_0 \in I$.

① Si f est continue sur I alors $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ est continue sur I .

② Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \geq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$.

③ Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$.

(Les deux propriétés précédentes restent vraies au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$)

Application

1 On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 4}$.

a Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

b Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2 Calculer les limites suivantes :

a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$

b $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 1} - 2x$

c $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - x$

Exercice 6

Calculer les limites suivantes:

1 $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{x^3 + 24}$

2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^5 - 3x^2 + 4}$

3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 2} - 2x$

4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x}$

5 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{x - 1}$

6 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+25} - 3}{x^2 - 3x + 2}$

12 Puissances rationnelles d'un nombre réel strictement positif:

Définition

Soient $x \in \mathbb{R}^+$ et r un nombre rationnel tel que : $r = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$). Le nombre a^r , appelé puissance rationnelle de base a et d'exposant r , est le nombre $\sqrt[q]{a^p}$. Autrement : $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.



Exemple

$$3^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{3^2} \quad 3^{\frac{5}{2}} = \sqrt{3^5} \quad 6^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{6} \quad 2^{-\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^{-5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^5}}$$

Propriété

Soient a et b deux réels strictement positifs et r et r' deux rationnels.

① $a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$.

② $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$.

③ $\frac{1}{a^r} = a^{-r}$.

④ $\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$.

⑤ $(ab)^r = a^r \times b^r$.

⑥ $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Application

Ecrire sous forme d'une puissance rationnelle les nombres $A = \frac{\sqrt[3]{4} \times 8^{\frac{1}{2}} \times \sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{4}}$ et $B = \frac{(27)^{\frac{2}{7}} \times (81)^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{17}{3}}}$